UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Alguns tópicos em L espaços topológicos: compacidade local, espaços de Hurewicz e propriedade ω^*

Tomas Keller Breuckmann

CURITIBA - PR
2004

Alguns tópicos em L espaços topológicos: compacidade local, espaços de Hurewicz e propriedade ω^*

Tomas Keller Breuckmann

Orientação:
Prof[a] Soraya R. T. Kudri

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada, Curso de Pós-graduação em Matemática Aplicada, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

UFPR - CURITIBA

2004

Ministério da Educação
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Setor de Ciências Exatas
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

PARECER DA BANCA EXAMINADORA

Após a apresentação do candidato, a banca fez a sua arguição e sugeriu algumas modificações na redação que podem contribuir para maior clareza dos resultados, as quais o candidato se comprometeu a incorporar na versão final da dissertação.

Curitiba, 18 de fevereiro de 2004.

Profª Soraya Rosana Torres Kudri
Presidente

Prof. Marko Antonio Rojas Medar

Prof. José Carlos Cifuentes Vasquez

Prof. Marcelo Muniz Silva Alves

UFPR
Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMAT

ATA DA 2ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos dezoito dias do mês de fevereiro de 2004, no Anfiteatro B - Prédio PC/ET, Universidade Federal do Paraná, foi instalada pelo Professor Higidio Portillo Oquendo, Coordenador do PGMAT - Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, a Banca Examinadora para a Segunda Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Estiveram presentes ao Ato, além do Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, professores, alunos e visitantes.

A banca examinadora, homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, ficou constituída pelos professores: Dr. Marko Antonio Rojas Medar, da Unicamp; Dr. José Carlos Cifuentes Vasquez, do Departamento de Matemática da UFPR; Dr. Marcelo Muniz Silva Alves, do Departamento de Matemática da UFPR e Dra. Soraya Rosana Torres Kudri, do Departamento de Matemática da UFPR, orientadora da dissertação a quem coube a presidência dos trabalhos.

Às dez horas, a banca iniciou seus trabalhos, convidando o candidato **Tomas Keller Breuckmann** a fazer a apresentação do tema da dissertação intitulada "Alguns Tópicos em *L* Espaços Topológicos: Compacidade local, Espaços de Hurewicz e Propriedade ω^*". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de argüição pelos membros participantes. Após a argüição, a banca com pelo menos 03 (três) membros, reuniu-se para apreciação do desempenho do pós-graduando.

A banca considerou que o pós-graduando fez uma apresentação com a necessária concisão. A Dissertação apresenta contribuição à área de estudos e não foram registrados problemas fundamentais de estrutura e redação, resultando em plena e satisfatória compreensão dos objetivos pretendidos.

Tendo em vista a dissertação e a argüição, os membros presentes da banca decidiram pela sua aprovação.

Curitiba, 18 de fevereiro de 2004.

Profª Soraya Rosana Torres Kudri
Presidente

Prof. Marko Antonio Rojas Medar

Prof. José Carlos Cifuentes Vasquez

Prof. Marcelo Muniz Silva Alves

TERMO DE APROVAÇÃO

Tomas Keller Breuckmann

"Alguns Tópicos em *L* Espaços Topológicos: Compacidade local, Espaços de Hurenwicz e Propriedade ω*.

Dissertação aprovada como requisito à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná.

Profª Soraya Rosana Torres Kudri (Orientadora) Soraya Rosana Torres Kudri
Departamento de Matemática/UFPR

Prof. Marko Antonio Rojas Medar
Departamento de Matemática Aplicada/UNICAMP

Prof. José Carlos Cifuentes Vasquez
Departamento de Matemática/UFPR

Prof. Marcelo Muniz Silva Alves
Departamento de Matemática/UFPR

Curitiba, fevereiro de 2004

Dedicado a todos os cubos,
esferas e outros seres
que vivem além de *Flatland*.

Agradecimento

Meus sinceros agradecimentos a professora Soraya.

Sumário

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	o conjunto dos números naturais.
$\emptyset$	o conjunto vazio.
$\leq$, $\nleq$	relação de ordem parcial e sua negação.
$\vee$, $\wedge$	supremo e ínfimo respectivamente.
$'$	involução com reversão de ordem.
$\langle X, \delta \rangle$	um espaço topológico.
$\langle X, T \rangle$	um espaço L-topológico.
$\langle X, T_D \rangle$	um subespaço de um espaço L-topológico.
$\overline{A}$	o fecho do conjunto A ou de um L-conjunto A.
A^c	o complementar do conjunto A.
χ_A	a função característica de A.
$x \in A$, $x \notin A$	x pertence a A e sua negação.
$\{x \in X \,;\, P(x)\}$	o conjunto dos elementos x em X com a propriedade P.
$A \subset_{<\infty} B$	A é um subconjunto finito de B.
$A \subset B$	A está contido em B.
$\{A_j\}_{j \in J}$	uma família indexada de conjuntos, quando $J = \mathbb{N}$ é uma sequência.
$\cup_{j \in J} A_j$	a união da família $\{A_j\}_{j \in J}$.
$f : X \to Y$	uma função de X em Y.

$\prod_{j\in J} A_j$	o produto da família $\{A_j\}_{j\in J}$.
$\sum_{j\in J} A_j$	a soma da família $\{A_j\}_{j\in J}$.
$f(A)$, $f^{-1}(A)$	a imagem direta e inversa do conjunto A ou de um L-conjunto A.
$f\|_A$	a restrição de f à A.
$\forall$, $\exists$	quantificadores "para todo" e "existe"
$pr(L)$	elementos primos do reticulado L.
π_j	a j-ésima projeção.
0, 1	menor e maior elementos de um reticulado L.
L^X	o conjunto dos L-conjuntos de X.
x_p	um L-ponto.
$supp(f)$	o suporte de f.
$\vee_{j\in J} f_j$	a união da família de L-conjuntos $\{f_j\}_{j\in J}$.
$\wedge_{j\in J} f_j$	a interseção da família de L-conjuntos $\{f_j\}_{j\in J}$.
$\omega(\delta)$	o espaço L-topológico de todas as funções contínuas de um espaço topológico $\langle X, \delta\rangle$ em um reticulado fuzzy L com topologia Scott.

Lista de Figuras

Resumo

Em um L espaço topológico propomos boas definições de compacidade local, compacidade local fraca e compacidade local relativa. Como resultados obtemos a invariância por funções abertas contínuas e sobrejetoras, a equivalência em espaços de Hausdorff, a regularidade em espaços de Hausdorff, teoremas de compatificação por um ponto e dois teoremas sobre a compacidade local e compacidade local fraca para o L-espaço produto. Propomos também boas definições para espaços de Hurewicz e a propriedade ω^* em L espaços topológicos. Alguns resultados sobre espaços de Hurewicz são obtidos, onde o principal teorema estabelece por meio da propriedade ω^* condições necessárias e suficientes para um espaço ser Hurewicz. Para isso foi necessário generalizar para um L espaço topológico um resultado simples sobre produto finito de compactos, que chamamos de Teorema da L-Caixa.

Palavras-chave: L espaços topológicos, compacidade local, espaços de Hurewicz, propriedade ω^*.

Abstract

In an L-topological space we propose good definitions for local compactness, weak local compactness and relative local compactness. As results we obtain the invariance under continuous open surjections, the equivalence in Hausdorff spaces, the regularity in Hausdorff spaces, one point compactification theorems and two theorems about local compacness and weak local compactness for L-product spaces. We also propose good definitions for Hurewicz spaces and the ω^* property in L-topological spaces. Some results about Hurewicz spaces are obtained, where the main theorem gives necessaries and sufficient conditions for a space to be Hurewicz by means of the ω^* property. For this result was necessary the generalization, for an L-topological space, of a result about the product of finite compacts spaces which we call here the L-Box Theorem.

Keywords: L-topological space, local compactness, Hurewicz spaces, ω^* property.

Capítulo 1

Introdução

A teoria de conjuntos fuzzy teve origem com Zadeh [26] em 1965. Tal trabalho causou grande interesse entre matemáticos e profissionais das mais diversas áreas, o que resultou em um novo campo da matemática chamado "Matemática Fuzzy".

Dado um conjunto X, podemos ver um subconjunto $A \subset X$ como uma função característica χ_A, figura 1.1, definida por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in A \\ 0 \text{ se } x \notin A \end{cases}$$

As operações $\cup$, $\cap$ e ^{c}, e a relação $\subset$ entre conjuntos podem ser traduzidas para funções características da seguinte forma:

$$A \cup B \leftrightarrow \chi_{A \cup B} = \chi_A \vee \chi_B.$$

$$A \cap B \leftrightarrow \chi_{A \cap B} = \chi_A \wedge \chi_B.$$

$$A^c \leftrightarrow \chi_{A^c} = 1 - \chi_A.$$

$$A \subset B \leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B.$$

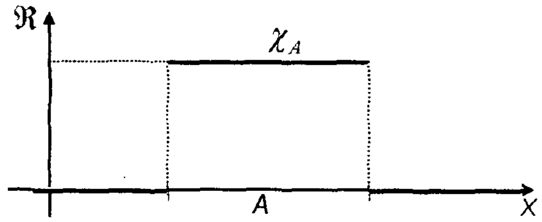

Figura 1.1: Função característica de A

onde $\vee$ e $\wedge$ denotam as operações de supremo e ínfimo respectivamente.

A idéia apresentada por Zadeh, foi de generalizar as funções características permitindo que asumissem valores no intervalo $[0, 1]$. Deste modo, um subconjunto de X passa a ser uma função característica generalizada $\mu : X \to [0, 1]$, chamados de conjuntos fuzzy, figura 1.2.

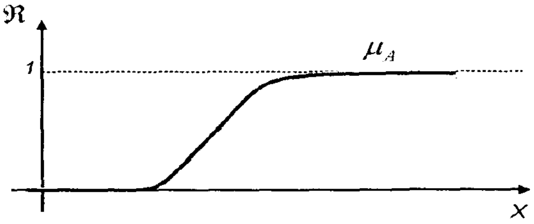

Figura 1.2: Conjunto fuzzy

As operações $\cup$, $\cap$ e ^{c}, e a relação $\subset$ entre conjuntos se generalizam para conjuntos fuzzy do mesmo modo que para funções características.

Em 1967, Goguen [6] generalizou ainda mais a noção de conjunto fuzzy, permitindo que as funções características asumissem valores em um reticulado L com elemento minimo $0 = \wedge L$ e maximo $1 = \vee L$. Deste modo, os subconjuntos de X passam a ser funções $f : X \to L$, chamados de L-conjuntos, ou conjuntos L-fuzzy, figura 1.3. O conjunto de todos os L-conjuntos de X é denotado por L^X.

Em L-conjuntos podemos definir a união de f e g como sendo o L-conjunto $f \vee g$, onde $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$. Definição análoga para a interseção de f e g utilizando $\wedge$. Dizemos que f está contido em g se e somente se $f \leq g$, ou seja, $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$.

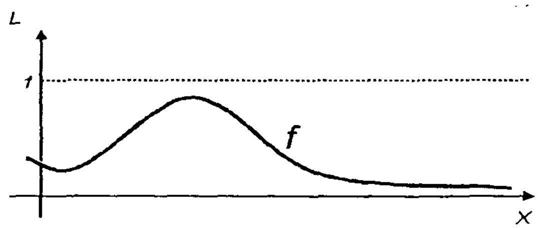

Figura 1.3: L-conjunto

A definição do complementar de um conjunto para um L-conjunto não pode ser generalizada da forma anterior, pois em um reticulado não temos obrigatoriamente uma operação de soma que nos permita fazer $1 - f(x)$. O complementar de um L-conjunto f é um L-conjunto f^c definido por $f^c(x) = f(x)'$ onde $' : L \to L$ é uma função que satisfaz as seguintes propriedades: $e \leq b \Rightarrow b' \leq e'$, e, $(e')' = e$. Note que com esta defininição temos as mesmas propriedades de conjuntos para o complementar, isto é, $f \leq g \Rightarrow g^c \leq f^c$ e $(f^c)^c = f$. Como notação escrevemos f' para o complementar de f e não f^c.

Um elemento $p \neq 1$ em L é primo se e somente se $e \wedge b \leq p \Rightarrow e \leq p$ ou $b \leq p$. O conjunto e todos os elementos primos de L será denotado por $pr(L)$. A definição de ponto fuzzy, ou L-ponto, que utilizaremos neste trabalho foi proposta em [21] por Warner. Um L-ponto de X, figura 1.4, é um L-conjunto $x_p : X \to L$ definido por:

$$x_p(y) = \begin{cases} p & \text{se } y = x \\ 1 & \text{se } y \neq x \end{cases}$$

onde $x \in X$ e $p \in pr(L)$.

Dizemos que o L-ponto x_p pertence ao L-conjunto f, e escrevemos $x_p \in f$, se e somente se $f(x) \not\leq p$, figura 1.4. Interessante notar que em L-conjuntos não temos necessariamente a equivalência $x_p \in f \Leftrightarrow x_p \notin f'$ que existe em conjuntos, pois $f(x) \not\leq p$ e $f(x) \geq p'$ podem não ser equivalentes.

A primeira definição de espaços topologicos fuzzy foi proposta por Chang em [2]. Um espaço topológico fuzzy é um conjunto X com uma topologia usual de conjuntos fuzzy, isto é: $\emptyset$ e X são abertos, união arbitraria de abertos é aberto, e interseção

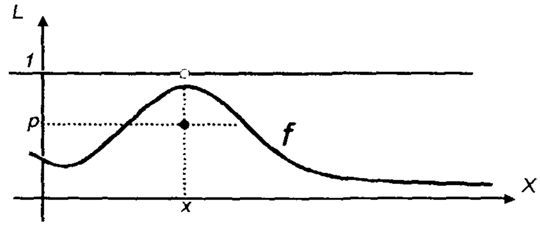

Figura 1.4: L-conjunto

finita de abertos é aberto. Atualmente estes espaços topológicos fuzzy são ditos espaços L-topológicos ou L espaços topológico.

O primeiro capítulo é dedicado a definições e propriedades básicas de reticulados, L-conjuntos e L-pontos, e de espaços L-topológicos.

No segundo capítulo apresentamos boas definições (definição 2.27) para as propriedades de compacidade local, compacidade local fraca e compacidade local relativa em um espaço L-topológico. Como resultados obtemos a invariância destas propriedades por funções sobrejetoras contínuas e abertas, a equivalência em espaços de Hausdorff, a regularidade em espaços de Hausdorff, teoremas de compactificação por um ponto e teoremas sobre a compacidade local do L-espaço produto.

Em topologia geral, temos um resultado simples sobre compacidade que diz que dado A, um subconjunto compacto de X, e um aberto W em X^n tal que $A^n \subset W$, existe um aberto V tal que $A \subset V$ e $V^n \subset W$. No terceiro capítulo apresentamos uma versão deste resultado para um L espaço topológico, o "teorema da L-caixa".

Duas propriedades de recobrimento existentes na topologia geral são a propriedade de Hurewicz e a propriedade ω (selectively ω-grouping property). A propriedade de Hurewicz foi introduzida por Hurewicz em [8] e trata de sequências de coberturas abertas. A propriedade ω foi introduzida por Scheepers em [18] e trata de sequências de ω coberturas.

No quarto capítulo, trabalharemos com duas propriedades de recobrimento em um L-espaço topológico: propriedade ω^* e propriedade de Hurewicz. Apresentamos boas definições para estas propriedades e obtemos um teorema garantindo condições necessárias e suficientes para que um espaço seja Hurewicz através da propriedade ω^* (selectively ω^*-grouping property).

Em todos os capítulos os resultados e definições sem atribuição de autoria são nossa contribuição.

Capítulo 2

Teoria Básica

Este capítulo consiste de definições e resultados necessários no desenvolvimento deste trabalho.

Dividimos este capítulo em quatro seções.

A primeira seção é dedicada a espaços topológicos. As definições e resultados apresentados podem ser encontrados em qualquer bom livro de topologia geral, como [3] e [15], e nos artigos [8] e [18].

A segunda seção é sobre reticulados. Importante aqui é a definição de reticulado fuzzy e um teorema sobre topologia Scott.

Na terceira seção introduzimos as definições e propriedades de L-conjuntos e L-pontos, que são casos particulares de L-conjuntos. Em muitos trabalhos, L-conjuntos são chamados de conjuntos L-fuzzy, que tem o mesmo significado.

Na última seção introduzimos espaços L-topológicos. Em trabalhos mais antigos, um espaço L-topológico era chamado espaço topológico fuzzy. Atualmente, a definição de Chang [2] corresponde a espaços L-topológicos e a definição de Sostak [19] corresponde a espaço topológico fuzzy. Algumas demonstrações simples serão incluidas em detalhes para tornar o leitor familiarizado com alguns conceitos em L-topologias.

2.1 Topologia Geral

Nesta seção X e Y são considerados conjuntos não vazios.

Teorema 2.1 *[15, Munkres] Sejam $\langle X, \delta \rangle$ um espaço topológico e A um compacto em X. Considere X^n com a topologia produto. Se W é um aberto em X^n tal que $A^n \subset W$ então existe $V \in \delta$ tal que $A \subset V$ e $A^n \subset V^n \subset W$.*

Em topologia geral existem três modos de se definir compacidade local, as quais chamaremos aqui de compacidade local, compacidade local fraca e compacidade local relativa.

Definição 2.1 *[3, Dugundji] Um espaço topológico $\langle X, \delta \rangle$ é localmente compacto se e somente se para cada $x \in X$ e $V \in \delta$ tal que $x \in V$ existem K compacto e $U \in \delta$ tais que $x \in U$ e $U \subset K \subset V$.*

Definição 2.2 *[3, Dugundji] Um espaço topológico $\langle X, \delta \rangle$ é fracamente localmente compacto se e somente se para cada $x \in X$ existem K compacto e $U \in \delta$ tais que $x \in U$ e $U \subset K$.*

Definição 2.3 *[3, Dugundji] Um espaço topológico $\langle X, \delta \rangle$ é relativamente localmente compacto se e somente se para cada $x \in X$ existe $U \in \delta$ com $\overline{U}$ compacto tal que $x \in U$.*

Teorema 2.2 *[3, Dugundji] Em espaços de Hausdorff as definições anteriores sobre compacidade local são equivalentes.*

As definições a seguir falam a respeito das propriedades de Hurewicz e propriedade ω (selectively ω-grouping). A primeira foi introduzida por Hurewicz em [8] e trata de sequências de coberturas abertas, a segunda foi introduzida mais recentemente por Scheepers em [18] e trata de sequências de ω coberturas. Usamos a notação $A \subset_{<\infty} B$ como abreviação para A é um subconjunto finito de B.

Definição 2.4 *[8, Hurewicz] Um espaço topologico $\langle X, \delta \rangle$ é Hurewicz se e somente se para cada sequência $\{\mathbb{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de coberturas abertas de X, existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:*

(i) *Cada* $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.

(ii) $\forall x \in X,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ n > n_0 \Rightarrow (\exists V \in \mathbb{V}_n,\ x \in V)$.

Definição 2.5 *[18, Scheepers] Uma* ω *cobertura aberta de* $\langle X, \delta\rangle$ *é uma família de abertos* $\mathbb{U}$ *com* $X \notin \mathbb{U}$ *tal que para cada* $F \subset_{<\infty} X$ *existe* $V \in \mathbb{U}$ *com* $F \subset V$

Definição 2.6 *[18, Scheepers] Um espaço topologico* $\langle X, \delta\rangle$ *tem a propriedade* ω *se e somente se para cada sequência* $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de* ω *coberturas de* X *existe uma sequência* $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que:*

(i) *Cada* $\mathbb{V}_n$ *é um subconjunto finito de* $\mathbb{U}_n$.

(ii) *Para cada subconjunto finito* F *de* X*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$n > n_0 \Rightarrow \exists V \in \mathbb{V}_n,\ F \subset V$$

Definição 2.7 *Uma* ω^* *cobertura em* X *é uma família de abertos* $\mathbb{U}$ *tal que para cada subconjunto finito* F *de* X*, existe* $V \in \mathbb{U}$ *com* $F \subset V$

Definição 2.8 *Um espaço topológico* $\langle X, \delta\rangle$ *tem a propriedade* ω^* *se e somente se para cada sequência* $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de* ω^* *coberturas de* X *existe uma sequência* $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que:*

(i) *Cada* $\mathbb{V}_n$ *é um subconjunto finito de* $\mathbb{U}_n$.

(ii) *Para cada subconjunto finito* F *de* X*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$n > n_0 \Rightarrow \exists V \in \mathbb{V}_n,\ F \subset V$$

2.2 Reticulados

Definição 2.9 *[1, Birkhoff] Um reticulado* $L = \langle L, \leq, \vee, \wedge\rangle$ *é um conjunto não vazio, com uma ordem parcial* $\leq$*, tal que cada subconjunto finito tem supremo e ínfimo, denotados respectivamente por* sup *e* inf*, ou* $\vee$ *e* $\wedge$.

Definição 2.10 *[1, Birkhoff] Um reticulado $L = \langle L, \leq, \vee, \wedge \rangle$ é completo se e somente se cada subconjunto tem supremo e ínfimo. Denotamos $0 = \wedge L$ e $1 = \vee L$.*

Observe que $0 = \vee\emptyset$ e $1 = \wedge\emptyset$. De fato, 0 é uma cota superior para $\emptyset$, isto é, $0 \geq x$ para cada $x \in \emptyset$, pois caso contrario existiria $x \in \emptyset$ com $0 \not\geq x$. Sendo uma cota superior, $0 \geq \vee\emptyset$, logo, $0 = \vee\emptyset$. Analogamente se mostra que $1 = \wedge\emptyset$.

Definição 2.11 *[5, Gierz et al.] Um reticulado completo $L = \langle L, \leq, \vee, \wedge \rangle$ é completamente distributivo se e somente se satisfaz:*

$$\wedge_{i \in I} \left(\vee_{j \in J_i} e_{i,j} \right) = \vee_{f \in K} \left(\wedge_{i \in I} \right) e_{i,f(i)}$$

onde para cada $i \in I$ e $j \in J_i$, $e_{i,j} \in L$; e K é o conjunto das funções $f : I \to \cup_{i \in I} J_i$ tais que para cada $i \in I$, $f(i) \in J_i$.

Definição 2.12 *[1, Birkhoff] Uma involução com reversão de ordem em um reticulado L é uma função $' : L \to L$, $f(e) = e'$, tal que:*

(i) $e \leq b \Rightarrow b' \leq e'$.

(ii) $(e')' = e$.

Definição 2.13 *[7, Hutton] Um reticulado fuzzy $L = \langle L, \leq, \vee, \wedge, ' \rangle$ é um reticulado completo, completamente distributivo com uma involução com reversão de ordem onde $0 = \wedge L$ e $1 = \vee L$.*

Note que a involução com reversão de ordem $' : L \to L$ é uma bijeção pois $a' = b' \Rightarrow a = (a')' = (b')' = b$ e $b = a'$ para cada $b \in L$ onde $a = b' \in L$. Com isso temos que $1' = 0$ e $0' = 1$. De fato, $0 = a'$ para algum $a \in L$, como $1 \geq a$ temos que $1' \leq a' = 0$, logo $1' = 0$ pois $0 = \wedge L$. Analogamente temos $0' = 1$.

Para o que segue nesta seção, L será um reticulado fuzzy.

Definição 2.14 *[5, Gierz at al.] Dizemos que $p \in L$:*

(i) *é primo se e somente se* $p \neq 1$ *e* $\forall e, b \in L$, $e \wedge b \leq p \Rightarrow e \leq p$ *ou* $b \leq p$.

Definimos $pr(L) = \{p \in L \,;\, p$ *é primo*$\}$

(ii) *é coprimo se e somente se* $p \neq 0$ *e* $\forall e, b \in L$, $e \vee b \geq p \Rightarrow e \geq p$ *ou* $b \geq p$.

Definição 2.15 *[1, Birkhoff] Um conjunto* D *com uma ordem parcial tal que:* $\forall a, b \in D$, $\exists k \in D$; $k \geq a$ *e* $k \geq b$, *é dito conjunto direto.*

Definição 2.16 *[5, Gierz at al.] A topologia Scott* T *em* L *é definida como segue.* $U \in T$ *se e somente se:*

1. $\forall a \in U$, $\forall b \in L$; $a \leq b \Rightarrow b \in U$

2. *Para cada* D *subconjunto direto de* L *com* $\vee D \in U$ *temos* $D \cap U \neq \emptyset$.

Teorema 2.3 *[22, Warner e McLean] A topologia Scott em* L *é gerada pelos conjuntos* $\{A_p\}_{p \in pr(L)}$, *onde* $A_p = \{x \in L \,;\, x \nleq p\}$.

2.3 L-Conjuntos e L-Pontos

Nesta seção X é um conjunto não vazio e L é um reticulado fuzzy com a topologia Scott.

Definição 2.17 *[6, Goguen] Um L-conjunto* f *em* X *é uma função* $f : X \to L$. *O conjunto de todos os L-conjuntos em* X *será denotado por* L^X.

Podemos definir em L^X uma ordem parcial, operações de sup e inf, e uma involução com reversão de ordem que fazem com que L^X seja um reticulado fuzzy. São elas [6, Goguen]:

(i) $f \leq g$ se e somente se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. Dizemos neste caso que f esta contido em g.

(ii) $(\vee_{j \in J} f_j)(x) = \vee_{j \in J} f_j(x)$ para cada $x \in X$ e família $\{f_j\}_{j \in J}$ em L^X. Dizemos que $(\vee_{j \in J} f_j)$ é a união dos L-conjuntos f_j.

(iii) $(\wedge_{j\in J} f_j)(x) = \wedge_{j\in J} f_j(x)$ para cada $x \in X$ e família $\{f_j\}_{j\in J}$ em L^X. Dizemos que $(\wedge_{j\in J} f_j)$ é a interseção dos L-conjuntos f_j.

(iv) $f'(x) = (f(x))'$ para $f \in L^X$. Dizemos que f' é o complementar de f.

Definição 2.18 *[24, Weiss] Seja f um L-conjunto em X. O suporte de f é o conjunto $supp(f) = \{x \in X; f(x) > 0\}$.*

Em [21], Warner determinou os elementos primos de L^X,

$$pr(L^X) = \left\{x_p \in L^X \ ; \ x \in X, \ p \in prL\right\}$$

onde cada $x_p : X \to L$ é o L-conjunto definido por

$$x_p(y) = \begin{cases} p \ , \ y = x \\ 1 \ , \ y \neq x \end{cases}$$

Definição 2.19 *[21, Warner] Os elementos de $pr(L^X)$ são chamados L-pontos de X. Dizemos que o L-ponto x_p pertence ao L-conjunto f em X, escrevemos $x_p \in f$, se e somente se $f(x) \not\leq p$.*

Observe que em L-conjuntos não temos necessariamente a equivalência $x_p \in f \Leftrightarrow x_p \notin f'$ que existe em conjuntos, $x \in A \Leftrightarrow x \notin A^c$, pois $f(x) \not\leq p$ e $f(x) \geq p'$ podem não ser equivalentes. Isso nos da uma certa liberdade de escolha em definições e teoremas. O modo como faremos a escolha entre $x_p \in f$ e $x_p \notin f'$ será semelhante ao feito por Kudri em [9, 10, 11, 12] que se mostrou satisfatória na obtenção de alguns resultados.

Definição 2.20 *[2, Chang] Sejam $f : X \to Y$ uma função, $g \in L^X$ e $h \in L^Y$ L-conjuntos em X e Y respectivamente. Definimos:*

(i) *A imagem direta de g por f é o L-conjunto $f(g)$ em Y definido por $f(g)(y) = \vee \{g(x) \in L \ ; \ x \in f^{-1}(y)\}$ para cada $y \in Y$.*

(ii) *A imagem inversa de h por f é o L-conjunto $f^{-1}(h)$ em X definido por $f^{-1}(h)(x) = h(f(x))$ para cada $x \in X$.*

Proposição 2.1 *[2, 14, 17] Sejam $f : X \to Y$ uma função, $\{g_j\}_{j\in J}$ uma família de L-conjuntos em X e $\{h_j\}_{j\in K}$ uma família de L-conjuntos em Y. Temos:*

(i) $f^{-1}(h'_j) = (f^{-1}(h_j))'$

(ii) $h_j \leq h_i \Rightarrow f^{-1}(h_j) \leq f^{-1}(h_i)$

(iii) $f^{-1}(\vee_{j\in K} h_j) = \vee_{j\in K} f^{-1}(h_j)$

(iv) $f^{-1}(\wedge_{j\in K} h_j) = \wedge_{j\in K} f^{-1}(h_j)$

(v) $f(g'_j) \leq (f(g_j))'$ *se f é injetiva.*

(vi) $(f(g_j))' \leq f(g'_j)$ *se f é sobrejetiva.*

(vii) $g_j \leq g_i \Rightarrow f(g_j) \leq f(g_i)$

(viii) $f(\vee_{j\in K} g_j) = \vee_{j\in K} f(g_j)$

(ix) $f(\wedge_{j\in K} g_j) \leq \wedge_{j\in K} f(g_j)$

(x) $f(f^{-1}(h_j)) \leq h_j$. *Se f é sobrejetora então vale a igualdade.*

(xi) $g_j \leq f^{-1}(f(g_j))$. *Se f é injetora então vale a igualdade.*

Proposição 2.2 *[14, Malghan e Benchalli] Sejam $f : X \to Y$ uma função, $\{g_j\}_{j\in J}$ uma família de L-conjuntos em X e h um L-conjunto em Y. Temos:*

(i) $g_j \leq g_i \Rightarrow supp(g_j) \subset supp(g_i)$

(ii) $supp(\vee_{j\in J} g_j) = \cup_{j\in J} supp(g_j))$

(iii) $supp(\wedge_{j=1}^{n} g_j) = \cap_{j=1}^{n} g_j$

(iv) $f(supp(g_j)) = supp(f(g_j))$

(v) $f^{-1}(supp(h)) = supp(f^{-1}(h))$

2.4 L-Topologias

Nesta seção X, Y e X_j são conjuntos não vazios, e L é um reticulado fuzzy com a topologia Scott.

Definição 2.21 *[2, Chang] O par $\langle X, T\rangle$ é um espaço L-topológico se e somente se T é uma L-topologia em X, isto é, $T \subset L^X$ é tal que:*

(i) *$\emptyset \in T$, $X \in T$, onde $\emptyset$ e X são os L conjuntos definidos por $\emptyset(x) = 0$ e $X(x) = 1$ para cada $x \in X$.*

(ii) *Para toda família $\{f_j\}_{j\in J}$ em T, $\vee_{j\in J} f_j \in T$.*

(iii) *Para toda família $\{f_j\}_{j=1}^k$ em T, $\wedge_{j=1}^k f_j \in T$*

Os elementos de T acima são chamados de L-conjuntos abertos, ou L-abertos. Dizemos que f é um L-conjunto fechado, ou um L-fechado, se e somente se $f' \in T$.

Definição 2.22 *[16, Pu e Liu] Seja $\langle X, T\rangle$ um espaço L-topológico. Seja $f \in L^X$. O interior de f, $int(f)$, e o fecho de f, $cl(f) = \overline{f}$, são definidos por:*

$$\begin{aligned} int(f) &= \vee\{g \in T\,;\, g \leq f\} \\ cl(f) &= \wedge\{g \in L^X\,;\, f \leq g,\, g' \in T\} \end{aligned}$$

Definição 2.23 *[12, Kudri] Sejam $\langle X, T_X\rangle$ e $\langle Y, T_Y\rangle$ espaços L-topológicos. Seja $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que f é contínua se e somente se $f^{-1}(g) \in T_X$ para cada $g \in T_Y$. Dizemos que f é aberta se e somente se $f(h) \in T_Y$ para cada $h \in T_X$.*

Proposição 2.3 *[12, Kudri] Sejam $\langle X, T_X\rangle$ e $\langle Y, T_Y\rangle$ espaços L-topológicos. Seja $f : X \to Y$ uma função. Temos:*

(i) *f é contínua se e somente se para cada L-conjunto fechado $g \in L^Y$ temos que $f^{-1}(g) \in L^X$ é um L-conjunto fechado.*

(ii) *Se f é contínua então* $\overline{f^{-1}(g)} \leq f^{-1}(\overline{g})$ *para cada* $g \in L^Y$.

(iii) *Se f é contínua então* $f(\overline{h}) \leq \overline{f(h)}$*para cada* $h \in L^X$.

Demonstração.

(i) *Necessidade:* Seja $g \in L^Y$ um L-conjunto fechado, então f' é um L-conjunto aberto. Como f é contínua temos que $f^{-1}(g') \in T_X$. Mas $(f^{-1}(g))' = f^{-1}(g') \in T_X$, logo, $f^{-1}(g)$ é um L-conjunto fechado.

Suficiência: Seja $g \in T_Y$, então g' é um L-conjunto fechado, logo $f^{-1}(g')$ é um L-conjunto fechado. Mas $(f^{-1}(g))' = f^{-1}(g')$, logo $f^{-1}(g) \in T_X$.

(ii) Como $g \leq \overline{g}$ e f é contínua temos que $f^{-1}(g) \leq f^{-1}(\overline{g})$ e, por (i), $f^{-1}(\overline{g})$ é um L-conjunto fechado. Logo, $\overline{f^{-1}(g)} \leq f^{-1}(\overline{g})$.

(iii) Como $h \leq f^{-1}(f(h))$ temos que $\overline{h} \leq \overline{f^{-1}(f(h))}$, então, pela continuidade da f e usando (ii) com $g = f(h)$, temos $\overline{h} \leq \overline{f^{-1}(f(h))} \leq f^{-1}(\overline{f(h)})$. Logo $f(\overline{h}) \leq f(f^{-1}(\overline{f(h)})) \leq \overline{f(h)}$

Fica assim demonstrado a proposição. ∎

Definição 2.24 *[25, Wong] Seja $\langle X, T\rangle$ um espaço L-topológico. Uma coleção $\mathbb{B} \subset T$ é uma base para T se e somente se para cada $f \in T$ existe uma família $\{g_j\}_{j\in J}$ em $\mathbb{B}$ tal que $f = \vee_{j\in J} g_j$. Neste caso dizemos que T é gerada por $\mathbb{B}$.*

Definição 2.25 *[25, Wong] Seja $\langle X, T\rangle$ um espaço L-topológico. Uma coleção $\mathbb{C} \subset T$ é uma subbase para T se e somente se a família de todas as interseções finitas de elementos de $\mathbb{C}$ forma uma base para T. Neste caso dizemos que T é gerada por $\mathbb{C}$.*

Definição 2.26 *[25, Wong] Seja $\{\langle X_j, T_j\rangle\}_{j\in J}$ uma família de espaços L-topológicos. Seja $X = \prod_{j\in J} X_j$ e defina para cada $\alpha \in J$ a α-ésima projeção $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ por $\pi_\alpha((x_j)_{j\in J}) = x_\alpha$. A L-topologia produto T em X tem como subbase a família $\cup_{j\in J}\{\pi_j^{-1}(f)\ ;\ f \in T_j\}$. Chamamos $\langle X, T\rangle$ de L-espaço produto.*

Seja $\langle X, \delta \rangle$ um espaço topológico. Em [20] e [21] Warner mostrou que o conjunto de todas as funções contínuas $f : \langle X, \delta \rangle \to L$ formam uma L-topologia $w(\delta)$ em X, e que uma base para este espaço é o conjunto $\mathbb{B} = \left\{ f_{Ub} \in L^X \ ; \ b \in L, \ U \in \delta \right\}$ onde cada f_{Ub} é definido por:

$$f_{Ub}(y) = \begin{cases} b & \text{se } x \in U \\ 0 & \text{se } x \notin U \end{cases}$$

Definição 2.27 *[20, Warner] Seja $\langle X, \delta \rangle$ um espaço topológico e P uma propriedade topológica em $\langle X, \delta \rangle$. Dizemos que uma propriedade topológica P_L em um espaço L-topológico é uma boa extensão de P se e somente se: $\langle X, \delta \rangle$ tem a propriedade P se e somente se $\langle X, w(\delta) \rangle$ tem a propriedade P_L.*

Os próximos quatro resultados serão usados futuramente sem referência a eles.

Proposição 2.4 *[12, Kudri] Seja $\langle X, \delta \rangle$ um espaço topológico, então: $f \in \omega(\delta)$ se e somente se $f^{-1} \{t \in L \ ; \ t \nleq p\} \in \delta$ para cada $p \in pr(L)$.*

Demonstração. *Necessidade:* Se $f \in \omega(\delta)$ então é uma função contínua de X em L, onde L tem a topologia Scott. Logo, $f^{-1}(A) \in \delta$ para cada A aberto em L. Em particular $f^{-1}(A) \in \delta$ para os abertos $A = \{t \in L \ ; \ t \nleq p\}$ da base.

Suficiência: Seja A um aberto em L, então podemos escrever $A = \cup_{p \in P} A_p$ onde $P \subset pr(L)$ e $A_p = \{t \in L \ ; \ t \nleq p\}$. Como $f^{-1}(A_p) \in \delta$ temos que $f^{-1}(A) \in \delta$ pois $f^{-1}(A) = \cup_{p \in P} f^{-1}(A_p)$. Logo $f \in \omega(\delta)$. ■

Proposição 2.5 *[12, Kudri] Seja $\langle X, \delta \rangle$ um espaço topológico, então: f é fechado em $\langle X, \omega(\delta) \rangle$ se e somente se $f^{-1} \{t \in L \ ; \ t \geq p'\}$ é fechado em $\langle X, \delta \rangle$ para cada $p \in pr(L)$.*

Demonstração. Usando que

$$(f')^{-1} \{t \in L \ ; \ t \nleq p\} = f^{-1} \{t \in L \ ; \ t \ngeq p'\}$$

e que

$$\left(f^{-1} \{t \in L \ ; \ t \ngeq p'\}\right)^c = f^{-1} \{t \in L \ ; \ t \geq p'\}$$

temos que:

$$\begin{aligned} f' \in \omega(\delta) &\Leftrightarrow \forall p \in pr(L),\ (f')^{-1}\{t \in L\,;\, t \not\leq p\} \in \delta \\ &\Leftrightarrow \forall p \in pr(L),\ f^{-1}\{t \in L\,;\, t \not\geq p'\} \in \delta \\ &\Leftrightarrow \forall p \in pr(L),\ \left(f^{-1}\{t \in L\,;\, t \not\geq p'\}\right)^c \text{ é fechado em } \langle X, \omega(\delta)\rangle \\ &\Leftrightarrow f^{-1}\{t \in L\,;\, t \geq p'\} \text{ é fechado em } \langle X, \omega(\delta)\rangle \end{aligned}$$

O resultado segue do fato de que f é fechado em $\langle X, \omega(\delta)\rangle$ se e somente se $f' \in \omega(\delta)$. ■

Proposição 2.6 *[12, Kudri] Seja $\langle X, \delta\rangle$ um espaço topológico, então: $A \in \delta$ se e somente se $\chi_A \in w(\delta)$.*

Demonstração. *Necessidade:* Seja $A \in \delta$. Seja $p \in pr(L)$ e considere o aberto básico $A_p = \{t \in L\,;\, t \not\leq p\}$. Temos que $\chi_A^{-1}(A_p) = \{x \in X\,;\, \chi_A(x) \not\leq p\} = A$. Logo, $\chi_A^{-1}(A_p) \in \delta$ para cada aberto básico, ou seja χ_A é continua. Portanto $\chi_A \in \omega(\delta)$.

Suficiência: Se $\chi_A \in w(\delta)$ então $\chi_A^{-1}\{t \in L\,;\, t \not\leq p\} \in \delta$ para cada $p \in pr(L)$, mas $\chi_A^{-1}\{t \in L\,;\, t \not\leq p\} = A$, logo, $A \in \delta$. ■

Proposição 2.7 *[12, Kudri] Seja $\langle X, \delta\rangle$ um espaço topológico. Seja $e \in L$ e f um L-conjunto em $\langle X, \omega(\delta)\rangle$ definido por:*

$$f(y) = \begin{cases} e \text{ se } y \in A \\ 0 \text{ se } y \notin A \end{cases}$$

Então:

$$int(f)(y) = \begin{cases} e \text{ se } y \in int(A) \\ 0 \text{ se } y \notin int(A) \end{cases} \quad e \ \overline{f}(y) = \begin{cases} e \text{ se } y \in \overline{A} \\ 0 \text{ se } y \notin \overline{A} \end{cases}$$

Demonstração. Ver Kudri [12]. ■

Definição 2.28 *[11, Kudri] Sejam $\langle X, T\rangle$ um espaço L-topológico e $g \in L^X$. Dizemos que g é compacto se e somente se para cada $p \in pr(L)$ e família $\{f_j\}_{j \in J}$ de L abertos tal que $(\vee_{j \in J} f_j)(x) \not\leq p$ para todo $x \in X$ com $g(x) \geq p'$, existe um subconjunto finito J_1 de J tal que $(\vee_{j \in J_1} f_j)(x) \not\leq p$ para todo $x \in X$ com $g(x) \geq p'$.*

Seja $\langle X, T\rangle$ um espaço L-topológico, a função $\phi : T \to \mathbb{P}(X \times pr(L))$ definida por $\phi(f) = \{(x,p) \in X \times pr(L) \; ; \; f(x) \not\leq p\}$ determina uma L-topologia $\phi(T)$ em $X \times pr(L)$ [23].

Lema 2.1 *[22, Warner e McLean] Seja $\langle X, T\rangle$ um espaço L-topológico. Temos: $\langle X, T\rangle$ é compacto se e somente se para cada $p \in pr(L)$, $X \times \{p\}$ é compacto em $\langle X \times pr(L), \phi(T)\rangle$.*

Demonstração. *Necessidade:* Seja $p \in pr(L)$ fixado. Seja $\{\phi(f_j)\}_{j\in J}$ uma cobertura aberta de $X \times \{p\}$, isto é, $f_j \in T$ e $X \times \{p\} \subset \cup_{j\in J}\phi(f_j)$.

Seja $x \in X$, então, existe $i \in J$ tal que $(x,p) \in \phi(f_i)$, isto é, $f_i(x) \not\leq p$, logo, $(\vee_{j\in J} f_j)(x) \not\leq p$. Pela compacidade de $\langle X, T\rangle$, existe um subconjunto finito J_1 de J tal que $(\vee_{j\in J_1} f_j)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$.

Temos então que $X \times \{p\} \subset \cup_{j\in J_1}\phi(f_j)$. De fato, para $x \in X$ temos $(\vee_{j\in J_1} f_j)(x) \not\leq p$, então existe $i \in J_1$ tal que $f_i(x) \not\leq p$, ou seja, $(x,p) \in \phi(f_i)$.

Suficiência: Sejam $p \in pr(L)$ e $\{f_j\}_{j\in J}$ uma família de L-abertos tal que $(\vee_{j\in J} f_j)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$.

Seja $(x,p) \in X \times \{p\}$. Como $x \in X$, $(\vee_{j\in J} f_j)(x) \not\leq p$, então existe $i \in J$ tal que $f_i(x) \not\leq p$, isto é, $(x,p) \in \phi(f_i)$, logo, $X \times \{p\} \in \cup_{j\in J}\phi(f_j)$. Pela compacidade de $X \times \{p\}$ existe um subconjunto finito J_1 de J tal que $X \times \{p\} \in \cup_{j\in J_1}\phi(f_j)$.

Segue que $(\vee_{j\in J_1} f_j)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$. De fato, para $x \in X$ temos $X \times \{p\} \in \cup_{j\in J_1}\phi(f_j)$, então existe $i \in J$ tal que $(x,p) \in \phi(f_i)$, ou seja $f_i(x) \not\leq p$. Logo, $(\vee_{j\in J_1} f_j)(x) \not\leq p$. ■

Teorema 2.4 *[22, Warner e McLean] Seja $\langle X, \delta\rangle$ um espaço topológico. Então: $\langle X, \delta\rangle$ é compacto se e somente se $\langle X, \omega(\delta)\rangle$ é compacto.*

Demonstração. Tendo em vista o lema anterior, mostraremos que: $\langle X, \delta\rangle$ é compacto se e somente se para cada $p \in pr(L)$, $X \times \{p\}$ é compacto em $\langle X \times pr(L), \phi(\omega(\delta))\rangle$

Necessidade: Sejam $p \in pr(L)$ e $\{\phi(f_j)\}_{j \in J}$, $f_j \in \omega(\delta)$, uma cobertura aberta de $X \times \{p\}$. Para cada $j \in J$ considere os abertos $U_j = \{t \in L\,;\, t \not\leq p\}$, então, $\{U_j\}_{j \in J}$ é uma cobertura aberta de X. De fato:

$$\begin{aligned} x \in X &\Rightarrow (x,p) \in X \times \{p\} \\ &\Rightarrow \exists j \in J;\ (x,p) \in \phi(f_j) \\ &\Rightarrow f_j(x) \not\leq p \\ &\Rightarrow x \in U_j \end{aligned}$$

Pela compacidade de X, existe um subconjunto finito J_1 de J tal que $X \subset \cup_{j \in J_1} U_j$. Segue que $X \times \{p\} \subset \cup_{j \in J} \phi(f_j)$. De fato:

$$\begin{aligned} (x,p) \in X \times \{p\} &\Rightarrow x \in X \\ &\Rightarrow \exists j \in J_1;\ x \in U_j \\ &\Rightarrow f_j(x) \not\leq p \\ &\Rightarrow (x,p) \in \phi(f_j) \end{aligned}$$

Portanto, $X \times \{p\}$ é compacto em $\langle X \times pr(L), \phi(\omega(\delta))\rangle$.

Suficiência: Seja $\{U_j\}_{j \in J}$ uma cobertura aberta de X. Fixe $p \in pr(L)$ e considere os L-abertos $f_j = \chi_{U_j}$. Temos então que $\{\phi(f_j)\}_{j \in J}$ é uma cobertura aberta de $X \times \{p\}$. De fato:

$$\begin{aligned} (x,p) \in X \times \{p\} &\Rightarrow x \in X \\ &\Rightarrow \exists j \in J;\ x \in U_j \\ &\Rightarrow f_j(x) = 1 \not\leq p \\ &\Rightarrow (x,p) \in \phi(f_j) \end{aligned}$$

Pela compacidade de $X \times \{p\}$, existe um subconjunto finito J_1 de J tal que $X \times \{p\} \subset \cup_{j \in J_1} \phi(f_j)$. Segue que $X \subset \cup_{j \in J_1} U_j$. De fato:

$$x \in X \Rightarrow (x,p) \in X \times \{p\}$$

$$\Rightarrow \exists j \in J_1;\ (x,p) \in \phi(f_j)$$
$$\Rightarrow f_j(x) \not\leq p$$
$$\Rightarrow x \in U_j$$

Portanto, $\langle X, \delta \rangle$ é compacto. ■

Teorema 2.5 *[11, Kudri] Sejam $\mathbb{S}$ uma subbase para a L-topologia T em X, e $g \in L^X$. Se para cada $p \in pr(L)$ e cada familia $\{f_j\}_{j\in J}$ de L-abertos subbásicos tais que $(\bigvee_{j\in J} f_j)(x) \not\leq p$ para todo $x \in X$ com $g(x) \geq p'$ existe um subconjunto finito J_1 de J tal que $(\bigvee_{j\in J_1} f_j)(x) \not\leq p$ para todo $x \in X$ com $g(x) \geq p'$, então, g é compacto.*

Demonstração. Ver Kudri [11]. ■

Teorema 2.6 *Seja $\langle X, T\rangle$ um espaço L-topológico. Se $h \in L^X$ é tal que supp(h) é finito, então h é compacto.*

Demonstração. Ver Kudri [12].

Teorema 2.7 *Seja $\langle X, T\rangle$ um espaço L-topológico. Se $h, g \in L^X$ são compactos então $h \vee g$ é compacto.*

Demonstração. Ver Kudri [12].

Teorema 2.8 *[12, Kudri] Sejam $\langle X, T_X\rangle$ e $\langle Y, T_Y\rangle$ espaços L-topológicos. Se $f : X \to Y$ é uma função contínua e χ_A é um L-conjunto compacto em X então $f(\chi_A)$ é um L-conjunto compacto em Y.*

Demonstração. Observe inicialmente que $f(\chi_A) = \chi_{f(A)}$. Seja $p \in pr(L)$ e seja $\{f_j\}_{j\in J}$ uma família de L-abertos tal que $(\bigvee_{j\in J} f_j)(y) \not\leq p$ para cada $y \in Y$ com $\chi_{f(A)}(y) \geq p'$, isto é, $y \in f(A)$.

Considere a família $\{g_j\}_{j\in J}$, onde cada $g_j = f^{-1}(f_j)$ é um L-aberto pela continuidade de f. Seja $x \in X$ com $\chi_A(x) \geq p'$, isto é, $x \in A$, então $y = f(x) \in f(A)$, logo $(\bigvee_{j\in J} f_j)(y) \not\leq p$. Mas $f_j(y) = f_j(f(x)) = f^{-1}(f_j)(x)$, logo $(\bigvee_{j\in J} g_j)(x) \not\leq p$ para cada $x \in A$.

Pela compacidade de χ_A existe um subconjunto finito J_1 de J tal que $(\bigvee_{j\in J_1} g_j)(x) \not\leq p$ para cada $x \in A$. Segue que $(\bigvee_{j\in J} f_j)(y) \not\leq p$ para cada $y \in f(A)$, isto é, $y \in Y$ e $\chi_{f(A)}(y) \geq p'$. De fato, seja $y \in f(A)$, então $y = f(x)$ para algum $x \in A$. Temos então que $(\bigvee_{j\in J} g_j)(x) \not\leq p$, ou seja, $(\bigvee_{j\in J} f_j)(y) \not\leq p$. ∎

Definição 2.29 *[4, Gantner et al.] Sejam $\langle X, T\rangle$ um espaço L-topológico, $A \subset X$ e $T_A = \{f|_A \in L^A\, ;\, f \in T\}$. Dizemos neste caso que $\langle A, T_A\rangle$ é um subespaço de $\langle X, T\rangle$.*

Teorema 2.9 *[12, Kudri] Sejam $\langle X, T\rangle$ um espaço L-topológico e $D \subset X$. Então: χ_D é compacto se e somente se o subespaço $\langle D, T_D\rangle$ é compacto.*

Demonstração. *Necessidade:* Sejam $p \in pr(L)$ e $\{f_j\}_{j\in J}$ uma família de L-abertos tais que $(\bigvee_{j\in J} f_j)(x) \not\leq p$ para cada $x \in D$. Para cada $j \in J$, seja $f_j^* \in T$ tal que $f_j = f_j^*|_D$. Então a família $\{f_j^*\}_{j\in J}$ é tal que $(\bigvee_{j\in J} f_j^*)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$ com $\chi_D(x) \geq p'$ pois $\chi_D(x) \geq p' \Leftrightarrow x \in D$.

Sendo χ_D compacto, existe um subconjunto finito J_1 de J tal que $(\bigvee_{j\in J_1} f_j^*)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$ com $\chi_D(x) \geq p'$. Então $(\bigvee_{j\in J_1} f_j)(x) \not\leq p$ para cada $x \in D$. Portanto $\langle D, T_D\rangle$ é compacto.

Suficiência: Sejam $p \in pr(L)$ e $\{f_j\}_{j\in J}$ uma família de L-abertos tais que $(\bigvee_{j\in J} f_j)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$ com $\chi_D(x) \geq p'$. Para cada $j \in J$ seja $g_j = f_j|_D$, então cada $g_j \in T_D$ e a família $\{g_j\}_{j\in J}$ é tal que $(\bigvee_{j\in J} g_j)(x) \not\leq p$ para cada $x \in D$ pois $\chi_D(x) \geq p' \Leftrightarrow x \in D$.

Sendo $\langle D, T_D\rangle$ compacto, existe um subconjunto finito J_1 de J tal que $(\bigvee_{j\in J} g_j)(x) \not\leq p$ para cada $x \in D$. Então $(\bigvee_{j\in J_1} f_j)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$ com $\chi_D(x) \geq p'$. Portanto χ_D é compacto. ∎

Teorema 2.10 *[12, Kudri] Seja $\{\langle X_j, T_j\rangle\}_{j\in J}$ uma família de espaços L-topológicos* *e seja X o L-espaço produto. Então: X é compacto se e somente se para cada $j \in J$, X_j é compacto.*

Demonstração. Ver Kudry [12]. ■

Definição 2.30 *[22, Warner e McLean] Um espaço L-topológico $\langle X, T\rangle$ é Hausdorff se e somente se para cada $p, q \in pr(L)$ e cada $x \neq y$ em X, existem $f, g \in T$ tais que $f(x) \not\leq p$, $g(y) \not\leq q$, e, $f(z) = 0$ ou $g(z) = 0$ para cada $z \in X$.*

Teorema 2.11 *[22, Warner e McLean] Seja $\langle X, \delta\rangle$ um espaço topológico. Então: $\langle X, \delta\rangle$ é Hausdorff se e somente se $\langle X, \omega(\delta)\rangle$ é Hausdorff.*

Demonstração. *Necessidade:* Sejam $p, q \in pr(L)$ e $x \neq y$ em X. Sendo $\langle X, \delta\rangle$ Hausdorff, existem $U, V \in \delta$ tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Seja $f = \chi_U$ e $g = \chi_V$, então $f, g \in \omega(\delta)$, $f(x) = 1 \not\leq p$, $g(y) = 1 \not\leq q$, e, $f(z) = 0$ ou $g(z) = 0$ para cada $z \in X$.

Suficiência: Seja $x \neq y$ em X. Fixe $p \in pr(L)$. Sendo $\langle X, \omega(\delta)\rangle$ Hausdorff, existem $f, g \in T$ tais que $f(x) \not\leq p$, $g(y) \not\leq q$, e, $f(z) = 0$ ou $g(z) = 0$ para cada $z \in X$. Sejam $S = \{t \in pr(L) \,;\, t \not\leq p\}$, $U = f^{-1}(S)$ e $U = g^{-1}(S)$. Então $U, V \in \delta$, $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. ■

Teorema 2.12 *[12, Kudri] Seja $\langle X, T\rangle$ um espaço L-topológico. Se $g \in L^X$ é compacto e $f \in L^X$ é L-fechado, então $f \wedge g$ é compacto.*

Demonstração. Sejam $p \in pr(L)$ e $\mathbb{H}$ uma família de L-abertos tais que $(\vee_{h \in \mathbb{H}} h)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$ com $(f \wedge g)(x) \geq p'$. Seja $\mathbb{F} = \mathbb{H} \cup \{f'\}$, então $(\vee_{h \in \mathbb{F}} h)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$ com $g(x) \geq p'$. De fato, seja $x \in X$ com $g(x) \geq p'$, então:

$$\begin{aligned} f(x) \geq p' &\Rightarrow (f \wedge g)(x) \geq p' \\ &\Rightarrow (\vee_{h \in \mathbb{H}} h)(x) \not\leq p \\ &\Rightarrow (\vee_{h \in \mathbb{F}} h)(x) \not\leq p \end{aligned}$$

ou

$$
\begin{aligned}
f(x) \not\geq p' \quad &\Rightarrow \quad f'(x) \not\leq p \\
&\Rightarrow \quad (\vee_{h\in\mathbb{F}} h)(x) \not\leq p
\end{aligned}
$$

Sendo g compacto, existe um subconjunto finito $\mathbb{U}$ de $\mathbb{F}$ tal que $(\vee_{h\in\mathbb{U}} h)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$ com $g(x) \geq p'$. Suponha $\mathbb{U} = \{h_1, \cdots, h_n, f'\}$, então $(\vee_{i=1}^{n} h_i)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$ com $(f \wedge g)(x) \geq p'$. De fato, seja $x \in X$ com $(f \wedge g)(x) \geq p'$, então $g(x) \geq p'$ e $f(x) \geq p'$. Logo $(\vee_{h\in\mathbb{U}} h)(x) \not\leq p$ e $f'(x) \leq p$. Segue que existe $h \in \mathbb{U}$ tal que $h(x) \not\leq p$ e que $h \neq f'$. Portanto $(\vee_{i=1}^{n} h_i)(x) \not\leq p$ e $f \wedge g$ é compacto. ■

Corolário 2.1 *[12, Kudri] Seja $\langle X, T\rangle$ um espaço L-topológico. Se $g \in L^X$ é compacto e f é um L-conjunto fechado tal que $f \leq g$, então, f é compacto.*

Demonstração. Segue do teorema 2.12. ■

Teorema 2.13 *[11, Kudri] Seja $\langle X, T\rangle$ um espaço L-topológico, Hausdorff. Se $F \subset X$ é tal que χ_F é compacto, então χ_F é L-fechado.*

Demonstração. Ver Kudri [11]. ■

Definição 2.31 *[17, Pu e Liu] Um espaço L-topológico $\langle X, T\rangle$ é dito totalmente estratificado se e somente se cada L-conjunto constante é L-aberto.*

Teorema 2.14 *[12, Kudri] Seja $\langle X, T\rangle$ um espaço L-topológico, totalmente estratificado e Hausdorff. Seja $D \subset X$, então o subespaço $\langle D, T_D\rangle$ é totalmente estratificado e Hausdorff.*

Demonstração. Seja $f \in L^D$ um L-conjunto constante, digamos $f(x) = c$ para cada $x \in D$. Sendo $\langle X, T\rangle$ totalmente estratificado, a função g definida por $g(y) = c$ para cada $y \in Y$ é um L-aberto. Como $g|_D = f$, temos que $f \in T_D$. Logo, $\langle D, T_D\rangle$ é totalmente estratificado.

Sejam $x \neq y$ em $D \subset X$ e $p, q \in pr(L)$. Como $\langle X, T\rangle$ é Hausdorff, existem $f, g \in T$ tais que $f(x) \not\leq p$, $g(y) \not\leq q$, e, $f(z) = 0$ ou $g(z) = 0$ para cada $z \in X$. Então $f|_D, g|_D \in T_D$ são tais que $f|_D(x) \not\leq p$, $g|_D(y) \not\leq q$, e, $f(z) = 0$ ou $g(z) = 0$ para cada $z \in D$. Logo, $\langle D, T_D\rangle$ é Hausdorff. ■

Definição 2.32 *[13, Lowen] Dizemos que um espaço L-topológico $\langle X, T\rangle$ é topologicamente gerado se e somente se existe uma topologia δ em X tal que $T = \omega(\delta)$.*

Teorema 2.15 *[22, Warner e McLean] Se $\langle X, T\rangle$ é um espaço L-topológico, totalmente estratificado, compacto e Hausdorff, então é topologicamente gerado.*

Demonstração. Ver Warner e McLean [22]. ■

Definição 2.33 *[12, Kudri] Sejam $\langle X, T\rangle$ um espaço L-topológico e $g \in L^X$. Dizemos que g é Lindelöf se e somente se para cada $p \in pr(L)$ e família $\{f_j\}_{j\in J}$ de L-abertos tal que $(\vee_{j\in J} f_j)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$ com $g(x) \geq p'$; existe um subconjunto enumerável J_1 de J tal que $(\vee_{j\in J_1} f_j)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$ com $g(x) \geq p'$.*

Teorema 2.16 *[12, Kudri] Seja $\langle X, \delta\rangle$ um espaço topológico. Então: $\langle X, \delta\rangle$ é Lindelöf se e somente se $\langle X, \omega(\delta)\rangle$ é Lindelöf.*

Demonstração. *Necessidade:* Sejam $p \in pr(L)$ e $\{f_j\}_{j\in J}$ uma família de L-abertos tal que $(\vee_{j\in J} f_j)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$. Considere os conjuntos $U_j = f_j^{-1}\{t \in L\,;\, t \not\leq p\}$, então, cada $U_j \in \delta$ e a família $\{U_j\}_{j\in J}$ é uma cobertura aberta de X. De fato:

$$\begin{aligned} x \in X &\Rightarrow (\vee_{j\in J} f_j)(x) \not\leq p \\ &\Rightarrow \exists j \in J;\ f_j(x) \not\leq p \\ &\Rightarrow x \in U_j \end{aligned}$$

Sendo $\langle X, \delta \rangle$ Lindelöf, existe um subconjunto enumerável J_1 de J tal que $X \subset \bigcup_{j \in J_1} U_j$. Segue que $(\bigvee_{j \in J_1} f_j)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$. De fato:

$$\begin{aligned} x \in X &\Rightarrow \exists j \in J_1;\ x \in U_j \\ &\Rightarrow f_j(x) \not\leq p \\ &\Rightarrow (\bigvee_{j \in J} f_j)(x) \not\leq p \end{aligned}$$

Portanto, $\langle X, \omega(\delta) \rangle$ é Lindelöf.

Suficiência: Seja $\{U_j\}_{j \in J}$ uma cobertura aberta de X. Fixe $p \in pr(L)$ e considere os L-abertos $f_j = \chi_{U_j}$, então a família $\{f_j\}_{j \in J}$ é tal que $(\bigvee_{j \in J} f_j)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$. De fato:

$$\begin{aligned} x \in X &\Rightarrow \exists j \in J_1;\ x \in U_j \\ &\Rightarrow f_j(x) = 1 \not\leq p \\ &\Rightarrow (\bigvee_{j \in J} f_j)(x) \not\leq p \end{aligned}$$

Sendo $\langle X, \omega(\delta) \rangle$ Lindelöf, existe um subconjunto enumerável J_1 de J tal que $(\bigvee_{j \in J_1} f_j)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$. Segue que $X \subset \bigcup_{j \in J_1} U_j$. De fato:

$$\begin{aligned} x \in X &\Rightarrow (\bigvee_{j \in J_1} f_j)(x) \not\leq p \\ &\Rightarrow \exists j \in J_1;\ f_j(x) \not\leq p \\ &\Rightarrow x \in U_j \end{aligned}$$

Portanto, $\langle X, \delta \rangle$ é Lindelöf. ■

Definição 2.34 *[12, Kudri] Um espaço L-topológico $\langle X, T \rangle$ é regular se e somente se para cada $x \in X$, cada $p \in pr(L)$, e cada L-conjunto fechado f tal que $f(x) = 0$ e $f(y_0) \geq p'$ para algum $y_0 \in X$, existem $u, v \in T$ com $u(x) \not\leq p$, $v(z) \not\leq p$ para cada $z \in X$ com $f(z) \geq p'$, e, $u(z) = 0$ ou $v(z) = 0$ para cada $z \in X$.*

Teorema 2.17 *[22, Warner e McLean] Seja $\langle X, \delta \rangle$ um espaço L-topológico. Então: $\langle X, \delta \rangle$ é regular se e somente se $\langle X, \omega(\delta) \rangle$ é regular.*

Demonstração. *Necessidade:* Sejam $x \in X$, $p \in pr(L)$ e f um L-conjunto fechado em $\langle X, \omega(\delta)\rangle$ tal que $f(x) = 0$ e existe $y_0 \in X$ com $f(y_0) \geq p'$.

Sendo f um L-conjunto fechado temos que $F = f^{-1}\{t \in L\,;\, t \geq p'\}$ é fechado em $\langle X, \delta\rangle$, e $F \neq \emptyset$ pois $y_0 \in F$. Como $\langle X, \delta\rangle$ é regular temos que existem $U, V \in \delta$ tais que $x \in U$, $F \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Seja $u = \chi_U$ e $v = \chi_V$, então $u, v \in \omega(\delta)$, $u(x) = 1 \not\leq p$ e $v(y) \not\leq p$ para cada $y \in X$ com $f(y) \geq p'$ pois

$$f(y) \geq p' \Rightarrow y \in F \Rightarrow y \in V \Rightarrow v(y) = 1 \not\leq p.$$

Também temos que $u(z) = 0$ ou $v(z) = 0$ para cada $z \in X$. De fato, se $z \in X$ e $u(z) \neq 0$ então $z \in U$, logo $z \notin V$ pois $U \cap V = \emptyset$. Segue que $v(z) = 0$.

Portanto $\langle X, \omega(\delta)\rangle$ é regular.

Suficiência: Seja $x \in X$ e $F \subset X$ um fechado não vazio em $\langle X, \delta\rangle$ tal que $x \notin F$. Seja $p \in pr(L)$ fixado.

Seja $f \in L^X$ definida por:

$$f(y) = \begin{cases} p' & \text{se } y \in F \\ 0 & \text{se } y \notin F \end{cases}$$

Como $F \neq \emptyset$ existe $y_0 \in F$, logo $f(y_0) = p'$. Também temos que f é L-fechado em $\langle X, \omega(\delta)\rangle$ pois para cada $q \in pr(L)$ temos

$$f^{-1}\{t \in L\,;\, t \geq q'\} = \begin{cases} F & \text{se } p' \geq q' \\ \emptyset & \text{se } p' \not\geq q' \end{cases}$$

Pela regularidade de $\langle X, \omega(\delta)\rangle$ existem $u, v \in \langle X, \omega(\delta)\rangle$ tais que $u(x) \not\leq p$, $v(y) \not\leq p$ para cada $y \in X$ com $f(y) \geq p'$, e, $u(z) = 0$ ou $v(z) = 0$ para cada $z \in X$.

Seja $U = u^{-1}\{t \in L\,;\, t \not\leq p\}$ e $V = v^{-1}\{t \in L\,;\, t \not\leq p\}$, então $U, V \in \delta$, $x \in U$ pois $u(x) \not\leq p$ e $F \subset V$ pois

$$y \in F \Rightarrow f(y) = p' \Rightarrow v(y) \not\leq p \Rightarrow y \in V.$$

Tambem temos que $U \cap V = \emptyset$. De fato, se $z \in U$ então $u(z) \not\leq p$ logo $v(z) = 0$, isto é, $z \notin V$.

Portanto $\langle X, \delta\rangle$ é regular. ■

Teorema 2.18 *[11, Kudri] Se $\langle X, T\rangle$ é um espaço L-topológico compacto e Hausdorff então $\langle X, T\rangle$ é regular.*

Demonstração. Sejam $x \in X$, $p \in pr(L)$ e f um L-conjunto fechado tal que $f(x) = 0$ e existe $y_0 \in X$ com $f(y_0) \geq p'$. Mostraremos que existem $u, v \in T$ tais que $u(x) \not\leq p$, $v(y) \not\leq p$ para cada $y \in X$ com $f(y) \geq p'$, e, $u(z) = 0$ ou $v(z) = 0$ para cada $z \in X$.

Seja $F = \{t \in X\ ;\ f(t) \geq p'\}$, então $F \neq \emptyset$ pois $y_0 \in F$ e $x \notin F$ pois $f(x) = 0$ e $p' \neq 0$.

Como $\langle X, T\rangle$ é Hausdorff, para cada $y \in F$ existem $f_y, g_y \in T$ tais que $f_y(x) \not\leq p$, $g_y(y) \not\leq p$, e, $f_y(z) = 0$ ou $g_y(z) = 0$ para cada $z \in X$.

Seja $\mathbb{A} = \{g_y\}_{y\in F}$. Então $(\vee_{h\in\mathbb{A}} h)(z) \not\leq p$ para cada $z \in X$ tal que $f(z) \geq p'$. De fato, se $z \in X$ e $f(z) \geq p'$ então $z \in F$ e $g_z(z) \not\leq p$.

Sendo f um L-fechado e $\langle X, T\rangle$ compacto, pelo corolário 2.1 f é compacto. Portanto existe um subconjunto finito $\mathbb{B} = \{g_{y_1}, \cdots, g_{y_k}\}$ de $\mathbb{A}$ tal que $(\vee_{h\in\mathbb{B}} h)(z) \not\leq p$ para cada $z \in F$.

Seja $u = \wedge_{i=1}^{k} f_{y_i}$ e $v = \vee_{i=1}^{k} g_{y_i}$, então $u, v \in T$, $u(x) \not\leq p$ pois $f_{y_i}(x) \not\leq p$ para cada $i = 1, \cdots, k$, $v(y) \not\leq p$ para cada $y \in F$ pois $v(y) = \left(\vee_{i=1}^{k} g_{y_i}\right)(y) \not\leq p$. Também temos que $u(z) = 0$ ou $v(z) = 0$ para cada $z \in X$. De fato, se $z \in X$ e $u(z) \neq 0$ então $f_{y_i}(z) \neq 0$ para cada $i = 1, \cdots, k$, logo $g_{y_i}(z) = 0$ para cada $i = 1, \cdots, k$ e $v(z) = 0$.

Portanto $\langle X, T\rangle$ é regular. ■

O próximo lema é um resultado simples que será usado em algumas demonstrações no próximo capítulo sem nos referirmos a ele.

Lema 2.2 *[12, Kudri] Seja $\langle X, \delta\rangle$ um espaço topológico. Então: $K \subset X$ é compacto em $\langle X, \delta\rangle$ se e somente se χ_K é compacto em $\langle X, \omega(\delta)\rangle$.*

Demonstração. *Necessidade:* Seja $p \in pr(L)$ e $\{f_j\}_{j\in J}$ uma família de L-abertos tal que $(\vee_{j\in J} f_j)(x) \not\leq p$ para todo $x \in X$ com $\chi_K(x) \geq p'$. Defina para cada $j \in J$ o aberto $U_j = f^{-1}\{t\,;\, t \not\leq p\}$. Temos então que a família $\{U_j\}_{j\in J}$ é uma cobertura aberta de K. De fato:

$$\begin{aligned} y \in K &\Rightarrow y \in X \text{ e } \chi_K(y) \geq p' \\ &\Rightarrow (\vee_{j\in J} f_j)(y) \not\leq p \\ &\Rightarrow \exists j \in J;\ f_j(y) \not\leq p \\ &\Rightarrow y \in U_j \end{aligned}$$

Sendo K compacto, existe um subconjunto finito J_1 de J tal que $K \subset \cup_{j\in J_1} U_j$. Segue que $(\vee_{j\in J_1} f_j)(x) \not\leq p$ para todo $x \in X$ com $\chi_K(x) \geq p'$. De fato:

$$\begin{aligned} y \in X \text{ e } \chi_K(y) \geq p' &\Rightarrow y \in K \\ &\Rightarrow \exists j \in J_1;\ y \in U_j \\ &\Rightarrow f_j(y) \not\leq p \\ &\Rightarrow (\vee_{j\in J_1} f_j)(y) \not\leq p \end{aligned}$$

Portanto χ_K é compacto.

Suficiência: Seja $\{U_j\}_{j\in J}$ uma cobertura aberta de K. Para cada $j \in J$ considere o L-aberto f_j definido por $f_j = \chi_{U_j}$. Então a família $\{f_j\}_{j\in J}$ é tal que $(\vee_{j\in J} f_j)(x) \not\leq p$ para todo $x \in X$ com $\chi_K(x) \geq p'$. De fato:

$$\begin{aligned} y \in X \text{ e } \chi_K(y) \geq p' &\Rightarrow y \in K \\ &\Rightarrow \exists j \in J;\ y \in U_j \\ &\Rightarrow f_j(y) \not\leq p \\ &\Rightarrow (\vee_{j\in J} f_j)(y) \not\leq p \end{aligned}$$

Pela compacidade de χ_K existe um subconjunto finito J_1 de J tal que $(\vee_{j\in J_1} f_j)(x) \not\leq p$ para todo $x \in X$ com $\chi_K(x) \geq p'$. Segue que $K \subset \cup_{j\in J_1} U_j$.

De fato:

$$\begin{aligned} y \in K &\Rightarrow y \in X \ \text{ e } \chi_K(y) \geq p' \\ &\Rightarrow \left(\vee_{j \in J_1} f_j\right)(y) \nleq p \\ &\Rightarrow \exists j \in J_1;\ f_j(y) \nleq p \\ &\Rightarrow y \in U_j \end{aligned}$$

Portanto K é compacto. ■

Capítulo 3

Compacidade Local

Neste capítulo trataremos da propriedade de compacidade local. Em topologia geral existem três modos de se definir compacidade local, equivalentes entre si em espaços de Hausdorff. Vamos chamar aqui de compacidade local, compacidade local fraca e compacidade local relativa, ver definições 2.1, 2.2 e 2.3.

As duas primeiras formas foram generalizadas para espaços L-topológicos por Kudri em [9] e [10] através de L-conjuntos muito compactos. Um L-conjunto k é muito compacto se e somente se é da forma:

$$k(y) = \begin{cases} b & y \in D \\ 0 & y \notin D \end{cases}$$

com χ_D compacto.

Definição 3.1 *[9] Um espaço L-topológico $\langle X, T\rangle$ é localmente compacto se e somente se para cada $x \in X$, $p \in pr(L)$ e $f \in T$ tal que $f(x) \not\leq p$ existem $g \in T$ e $k \in L^X$ muito compacto tais que $g(x) \not\leq p$ e $g \leq k \leq f$.*

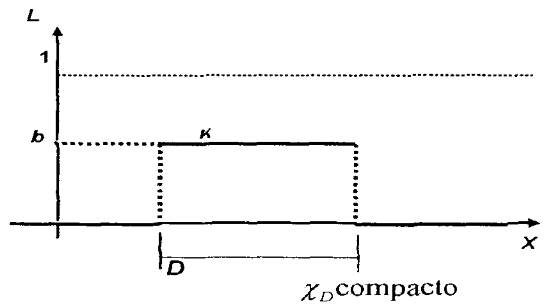

Figura 3.1: L-conjunto muito compacto

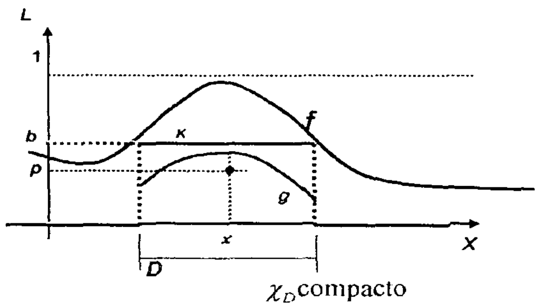

Figura 3.2: Compacidade local

Definição 3.2 *[9] Um espaço L-topológico $\langle X, T\rangle$ é fracamente localmente compacto se e somente se para cada $x \in X$ e $p \in pr(L)$ existem $g \in T$ e $k \in L^X$ muito compacto tais que $g(x) \not\leq p$ e $g \leq k$.*

Em [10] Kudri mostrou a equivalencia destas duas propriedades em espaços de Hausdorff. Faltava ainda uma definição para espaços relativamente localmente compactos equivalente a estas em espaços de Hausdorff.

Em anotações feitas por Kudri e Aygün foi proposta uma boa definição para espaços relativamente localmente compactos. O que fazemos aqui, na primeira seção, é redefinir as propriedades de compacidade local e compacidade local fraca nos moldes da definição de Kudri e Aygün para compacidade local relativa. A segunda seção é dedicada aos resultados obtidos destas propriedades: a invariância por sobrejeções contínuas e abertas, equivalências em espaços de Hausdorff, regularidade em espaços de Hausdorff, teoremas de compactificação por um ponto e teoremas sobre a

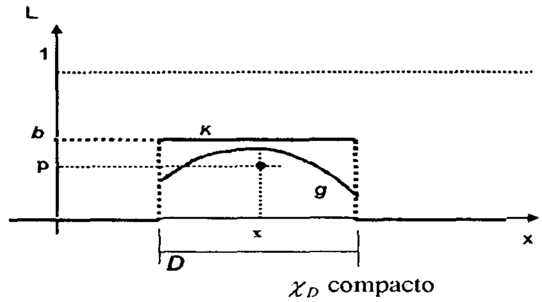

Figura 3.3: Compacidade local fraca

compacidade local do L-espaço produto.

3.1 Compacidade local

Definição 3.3 *Um espaço L-topológico* $\langle X, T\rangle$ *é localmente compacto se e somente se para cada* $x \in X$, $p \in pr(L)$ *e* $f \in T$ *tal que* $f(x) \nleq p$, *existem* $g \in T$ *e* $k \in L^X$, *com* $\chi_{supp(k)}$ *compacto, tais que* $g(x) \nleq p$ *e* $g \leq k \leq f$.

Teorema 3.1 *Seja* $\langle X, \delta\rangle$ *um espaço topológico. Então:* $\langle X, \delta\rangle$ *é localmente compacto se e somente se* $\langle X, \omega(\delta)\rangle$ *é localmente compacto.*

Demonstração. *Necessidade:* Sejam $x \in X$, $p \in pr(L)$ e $f \in \omega(\delta)$ tal que $f(x) \nleq p$. Seja $h \in \omega(\delta)$ um L-conjunto aberto básico tal que $h(x) \nleq p$ e $h \leq f$, definido por:

$$h(y) = \begin{cases} e & \text{se } y \in V \in \delta \\ 0 & \text{se } y \notin V \end{cases}$$

Como $\langle X, \delta\rangle$ é localmente compacto, existem $U \in \delta$ e um subconjunto compacto J de X tais que $x \in U$ e $U \subset J \subset V$.

Sejam $g \in \omega(\delta)$ e $k \in L^X$ definidos por:

$$g(y) = \begin{cases} e & \text{se } y \in U \in \delta \\ 0 & \text{se } y \notin U \end{cases} \qquad k(y) = \begin{cases} e & \text{se } y \in J \in \delta \\ 0 & \text{se } y \notin J \end{cases}$$

Então $g(x) \nleq p$, $g \leq k \leq h \leq f$ e $\chi_{supp(k)} = \chi_J$ é compacto pois J é compacto. Logo, $\langle X, \omega(\delta)\rangle$ é localmente compacto.

Suficiência: Sejam $x \in X$ e $V \in \delta$ tal que $x \in V$. Fixe $p \in pr(L)$. Como $\langle X, \omega(\delta)\rangle$ é localmente compacto, para $f = \chi_V$, existem $g \in \omega(\delta)$ e $k \in L^X$, com $\chi_{supp(k)}$ compacto, tais que $g(x) \nleq p$ e $g \leq k \leq f$.

Sejam $U = g^{-1}\{t \in L\,;\, t \nleq p\}$ e $K = supp(k)$, então, $U \in \delta$, $x \in U$, $U \subset K \subset V$ e K é um subconjunto compacto de X pois $\chi_{supp(k)}$ é compacto. Logo, $\langle X, \delta\rangle$ é localmente compacto. ■

Definição 3.4 *Um espaço L-topológico* $\langle X, T\rangle$ *é fracamente localmente compacto se e somente se para cada* $x \in X$ *e* $p \in pr(L)$ *existem* $f \in T$ *e* $k \in L^X$, *com* $\chi_{supp(k)}$ *compacto, tais que* $f(x) \nleq p$ *e* $f \leq k$.

Teorema 3.2 *Seja $\langle X, \delta \rangle$ um espaço topológico. Então: $\langle X, \delta \rangle$ é fracamente localmente compacto se e somente se $\langle X, \omega(\delta) \rangle$ é fracamente localmente compacto.*

Demonstração. *Necessidade:* Sejam $x \in X$ e $p \in pr(L)$. Como $\langle X, \delta \rangle$ é fracamente localmente compacto, existem $U \in \delta$ e um subconjunto compacto J de X tais que $x \in U$ e $U \subset J$.

Sejam $g = \chi_U$ e $K = \chi_J$, então $g \in \omega(\delta)$, $g(x) \not\leq p$, $g \leq k$ e $\chi_{supp(k)} = \chi_J$ é compacto pois J é compacto. Logo, $\langle X, \omega(\delta) \rangle$ é fracamente localmente compacto.

Suficiência: Seja $x \in X$ e fixe $p \in pr(L)$. Como $\langle X, \omega(\delta) \rangle$ é fracamente localmente compacto existem $g \in \omega(\delta)$ e $k \in L^X$, com $\chi_{supp(k)}$ compacto, tais que $g(x) \not\leq p$ e $g \leq k$.

Sejam $V = g^{-1}\{t \in L\,;\, t \not\leq p\}$ e $K = supp(k)$, então, $V \in \delta$, $x \in V$, $V \subset K$ e K é um subconjunto compacto de X pois $\chi_{supp(k)}$ é compacto. Logo, $\langle X, \delta \rangle$ é fracamente localmente compacto. ■

Definição 3.5 *Um espaço L-topológico $\langle X, T \rangle$ é relativamente localmente compacto se e somente se para cada $x \in X$ e $p \in pr(L)$ existe $f \in T$, com $\chi_{supp(\bar{f})}$ compacto, tal que $f(x) \not\leq p$.*

Teorema 3.3 *Seja $\langle X, \delta \rangle$ um espaço topológico. Então: $\langle X, \delta \rangle$ é relativamente localmente compacto se e somente se $\langle X, \omega(\delta) \rangle$ é relativamente localmente compacto.*

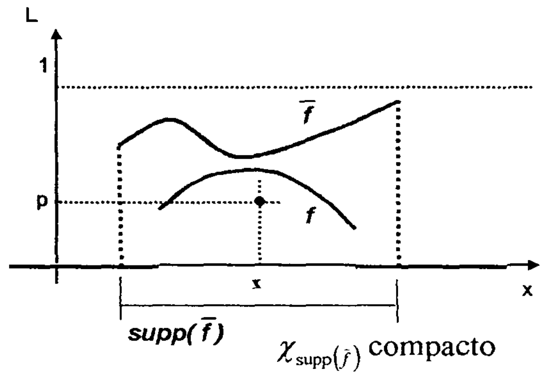

Figura 3.4: Compacidade local relativa

Demonstração. *Necessidade:* Sejam $x \in X$ e $p \in pr(L)$. Como $\langle X, \delta \rangle$ é relativamente localmente compacto existe $V \in \delta$, com $\overline{V}$ compacto, tal que $x \in V$. Seja $f = \chi_V$, então $f(x) = 1 \not\leq p$. Temos ainda que $\overline{f} = \chi_{\overline{V}}$, logo $supp(\overline{f}) = \overline{V}$ é compacto, portanto $\chi_{supp(\overline{f})}$ é compacto.

Suficiência: Seja $x \in X$ e fixe $p \in pr(L)$. Como $\langle X, \omega(\delta) \rangle$ é relativamente localmente compacto existe $f \in \omega(\delta)$ tal que $f(x) \not\leq p$, com $\chi_{supp(\overline{f})}$ compacto, logo $supp(\overline{f})$ é compacto. Seja $g \in L^X$ Um L-conjunto aberto básico tal que $g(x) \not\leq p$ e $g \leq f$, definido por:

$$g(y) = \begin{cases} e & \text{se } y \in V \in \delta \\ 0 & \text{se } y \notin V \end{cases}$$

Como $g \leq f$ e

$$\overline{g}(y) = \begin{cases} e & \text{se } y \in \overline{V} \\ 0 & \text{se } y \notin \overline{V} \end{cases}$$

temos que $\overline{g} \leq \overline{f}$ e $\overline{V} = supp(\overline{g}) \subset supp(\overline{f})$, logo, $\overline{V}$ é compacto pois é fechado e $supp(\overline{f})$ é compacto. ■

3.2 Propriedades

Teorema 3.4 *Seja $\langle X, T_X \rangle$ um espaço L-topológico localmente compacto e seja $\langle Y, T_Y \rangle$ um espaço L-topológico. Se $h : X \to Y$ é uma sobrejeção contínua e aberta então $\langle Y, T_Y \rangle$ é localmente compacto.*

Demonstração. Sejam $y \in Y$, com $y = h(x)$, $p \in pr(L)$ e $f \in T_Y$ tal que $f(y) \not\leq p$. Seja $j = h^{-1}(f)$ então $j \in T_X$, pois h contínua, e $j(x) = f(y) \not\leq p$. Como $\langle X, T_X \rangle$ é localmente compacto existem $i \in T_X$ e $c \in L^X$, $\chi_{supp(c)}$ compacto, tais que $i(x) \not\leq p$ e $i \leq c \leq j$.

Sejam $g = h(j)$ e $k = h(c)$. Então $g \in T_Y$, pois h é aberta, e $g \leq k \leq f$, pois $i \leq c \leq j$. Como h é contínua e $\chi_{supp(c)}$ é compacto temos que $h(\chi_{supp(c)})$ é compacto, teorema 2.8. Mas:

$$h(\chi_{supp(c)}) = \chi_{h(supp(c))} = \chi_{supp(h(c))} = \chi_{supp(k)}$$

Portanto, $\langle Y, T_Y \rangle$ é localmente compacto. ■

Teorema 3.5 *Seja $\langle X, T_X \rangle$ um espaço L-topológico fracamente localmente compacto e seja $\langle Y, T_Y \rangle$ um espaço L-topológico. se $h : X \to Y$ é uma sobrejeção contínua e aberta então $\langle Y, T_Y \rangle$ é fracamente localmente compacto.*

Demonstração. Sejam $y \in Y$, com $y = h(x)$, e $p \in pr(L)$. Como $\langle X, T_X \rangle$ é fracamente localmente compacto existem $i \in T_X$ e $c \in L^X$, com $\chi_{supp(c)}$ compacto, tais que $i(x) \not\leq p$ e $i \leq c$.

Sejam $g = h(j)$ e $k = h(c)$. Então $g \in T_Y$, pois h é aberta, e $g \leq k$, pois $i \leq c$. Como h é contínua e $\chi_{supp(c)}$ é compacto temos que $h(\chi_{supp(c)})$ é compacto, 2.8. Mas:

$$h(\chi_{supp(c)}) = \chi_{h(supp(c))} = \chi_{supp(h(c))} = \chi_{supp(k)}$$

Portanto, $\langle Y, T_Y \rangle$ é fracamente localmente compacto. ■

Teorema 3.6 *Seja $\langle X, T_X \rangle$ um espaço L-topológico relativamente localmente compacto e seja $\langle Y, T_Y \rangle$ um espaço L-topológico. Se $h : X \to Y$ é uma sobrejeção contínua e aberta tal que $\overline{h(g)} \leq h(\overline{g})$ para cada $g \in L^X$, então, $\langle Y, T_Y \rangle$ é relativamente localmente compacto.*

Demonstração. Sejam $y \in Y$, com $y = h(x)$, e $p \in pr(L)$. Como $\langle X, T_X \rangle$ é relativamente localmente compacto existe $g \in T_X$, com $\chi_{supp(\overline{g})}$ compacto, tal que $g(x) \not\leq p$. Seja $f = h(g)$ então $f(x) \not\leq p$, $f \in T_Y$ pois h é aberta, e $h(\chi_{supp(\overline{g})})$ e compacto pois h é contínua. Mas:

$$h(\chi_{supp(\overline{g})}) = \chi_{h(supp(\overline{g}))} = \chi_{supp(h(\overline{g}))} = \chi_{supp(\overline{h(g)})} = \chi_{supp(\overline{f}))}$$

onde usamos o teorema 2.3 e o fato de $\overline{h(g)} \leq h(\overline{g})$.

Portanto, $\langle Y, T_Y \rangle$ é relativamente localmente compacto. ■

Teorema 3.7 *Se $\langle X, T \rangle$ é um espaço L-topológico localmente compacto então é fracamente localmente compacto.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $p \in pr(L)$. Como $\langle X, T\rangle$ é localmente compacto, para $f = X$, existem $g \in T$ e $k \in L^X$, com $\chi_{supp(k)}$ compacto, tal que $g(x) \not\leq p$ e $g \leq k \leq f$. Logo $\langle X, T\rangle$ é fracamente localmente compacto. ■

Teorema 3.8 *Se $\langle X, T\rangle$ é um espaço L-topológico compacto Hausdorff totalmente estratificado, então $\langle X, T\rangle$ é localmente compacto.*

Demonstração. Sendo $\langle X, T\rangle$ compacto Hausdorff totalmente estratificado, é topologicamente gerado, teorema 2.15, logo existe uma topologia δ em X tal que $T = \omega(\delta)$. Pelos teoremas 2.4 e 2.11, $\langle X, \delta\rangle$ é um espaço topológico compacto e Hausdorff, logo é localmente compacto. Segue do teorema 3.1 que $\langle X, T\rangle$ é localmente compacto. ■

Teorema 3.9 *Se $\langle X, T\rangle$ é um espaço L-topológico fracamente localmente compacto totalmente estratificado Hausdorff então é localmente compacto.*

Demonstração. Sejam $x \in X$, $p \in pr(L)$ e $f \in T$ tal que $f(x) \not\leq p$. Vamos mostrar que existem $g \in T$ e $k \in L^X$, com $\chi_{supp(k)}$ compacto, tais que $g(x) \not\leq p$ e $g \leq k \leq f$.

Como $\langle X, T\rangle$ é fracamente localmente compacto existem $i \in T$ e $j \in L^X$, com $\chi_{supp(j)}$ compacto, tais que $i(x) \not\leq p$ e $i \leq j$. Seja $D = supp(j)$. Como $\chi_{supp(j)}$ é compacto e $\langle X, T\rangle$ é Hausdorff totalmente estratificado, o subespaço $\langle D, T_D\rangle$ é um espaço L-topológico compacto totalmente estratificado e Hausdorff. Então, pelo teorema 3.8, $\langle D, T_D\rangle$ é localmente compacto. Logo, para $f_D = f|_D$, existem $h_D \in T_D$ e $c \in L^D$, com $\chi_{supp(c)}$ compacto, tais que $h_D \leq c_D \leq f_D$ e $h_D(x) \not\leq p$.

Seja $h \in T$ tal que $h|_D = h_D$ e defina $k \in L^X$ por

$$k(y) = \begin{cases} c_D(y) & \text{if } y \in D \\ 0 & \text{if } y \notin D \end{cases}$$

então, $h(x) \not\leq p$ e $\chi_{supp(k)}$ é compacto pois $supp(k) = supp(c_D)$.

Seja $g = h \wedge i$, então $g \in T$ e $g(x) \not\leq p$. Também temos que $g \leq k \leq f$. De fato, se $y \in D$ então $g(y) \leq h(y) \leq k(y) \leq f(y)$ pois $h_D \leq c_D \leq f_D$, e se $y \notin D$ então $i(y) = 0$ e $k(y) = 0$, logo $g(y) = 0 = k(y) \leq f(y)$. ■

Teorema 3.10 *Se $\langle X, T\rangle$ é um espaço L-topológico relativamente localmente compacto então $\langle X, T\rangle$ é fracamente localmente compacto.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $p \in pr(L)$. Como $\langle X, T\rangle$ é relativamente localmente compacto existe $g \in T$, com $\chi_{supp(\overline{g})}$ compacto, tal que $g(x) \not\leq p$. Como $g \leq \overline{g}$ temos que $\langle X, T\rangle$ é fracamente localmente compacto. ■

Teorema 3.11 *Seja $\langle X, T\rangle$ um espaço L-topológico fracamente localmente compacto Hausdorff tal que $\chi_{supp(\overline{f})} = \overline{\chi_{supp(f)}}$, então $\langle X, T\rangle$ é relativamente localmente compacto.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $p \in pr(L)$. Como $\langle X, T\rangle$ é fracamente localmente compacto existem $f \in T$ e $k \in L^X$, com $\chi_{supp(k)}$ compacto, tal que $f(x) \not\leq p$ e $f \leq k$. Como $\chi_{supp(k)}$ é compacto em um espaço de Hausdorff, é L-fechado, ver teorema 2.13, então, $\chi_{supp(k)} = \overline{\chi_{supp(k)}}$. Como $f \leq k$, $\chi_{supp(f)} \leq \chi_{supp(k)}$, então, $\overline{\chi_{supp(f)}} \leq \chi_{supp(k)}$, logo $\overline{\chi_{supp(f)}}$ é compacto pois é fechado e $\chi_{supp(k)}$ é compacto, ver corolário 2.1. Mas $\overline{\chi_{supp(f)}} = \chi_{supp(\overline{f})}$, então $\chi_{supp(\overline{f})}$ é compacto. Portanto $\langle X, T\rangle$ é relativamente localmente compacto. ■

Teorema 3.12 *Seja $\{X_j\}_{j\in J}$ um família de espaços L-topológicos totalmente estratificados. Então: O L-espaço produto $\prod_{j\in J} X_j$ é localmente compacto se e somente se X_j é localmente compacto para cada $j \in J$ e X_j é compacto para cada $j \in J - J_1$ onde J_1 é um subconjunto finito de J.*

Demonstração. Seja $X = \prod_{j\in J} X_j$.

Necessidade: Como a j-ésima projeção, $\pi_j : X \to X_j$, é uma função sobrejetora aberta contínua e X é localmente compacto, pelo teorema 3.4, X_j é localmente compacto para cada $j \in J$. Sejam $p \in pr(L)$, $x \in X$ e f um L-conjunto aberto em X com $f(x) \not\leq p$. Então pela compacidade local de X, existem um L-conjunto aberto g em X e um L-conjunto k em X, com $\chi_{supp(k)}$ compacto, tais que $g(x) \not\leq p$ e $g \leq k \leq f$.

Seja $\wedge_{i=1}^{m}\pi_{j_i}^{-1}(g_{j_i})$ um L-conjunto aberto básico tal que

$$\wedge_{i=1}^{m}\pi_{j_i}^{-1}(g_{j_i}) \leq g \leq k \leq f.$$

Então

$$\begin{aligned}
\chi_{supp(k)} &\geq \chi_{supp\left(\wedge_{i=1}^{m}\pi_{j_i}^{-1}(g_{j_i})\right)} \\
&= \chi_{\cap_{i=1}^{m} supp\left(\pi_{j_i}^{-1}(g_{j_i})\right)} \\
&= \wedge_{i=1}^{m}\chi_{supp\left(\pi_{j_i}^{-1}(g_{j_i})\right)} \\
&= \wedge_{i=1}^{m}\pi_{j_i}^{-1}\left(\chi_{supp(g_{j_i})}\right)
\end{aligned}$$

Logo $\pi_j(\chi_{supp(k)}) \geq \pi_j(\wedge_{i=1}^{m}\pi_{j_i}^{-1}(\chi_{supp(g_{j_i})})) = X_j$ para todo $j \in J - J_1$, onde $J_1 = \{j_1, \cdots, j_m\}$, ou seja, $\pi_j(\chi_{supp(k)}) = X_j$. Como π_j é contínua e $\chi_{supp(k)}$ é compacto em X temos pelo teorema 2.8 que X_j é compacto para cada $j \in J - J_1$.

Suficiência: Sejam $p \in pr(L)$, $x \in X$ e $f = \wedge_{i=1}^{m}\pi_{j_i}^{-1}(f_{j_i})$ um L-aberto básico em X tal que $f(x) \not\leq p$ onde f_{j_i} é um L-aberto em X_j. Podemos assumir que $\{j_1, \cdots, j_m\}$ contém os índices $j_i \in J_1$ onde X_{j_i} não é compacto, caso contrário, $g = f \wedge \left(\wedge_{j \in J_1}\pi_j^{-1}(f_j)\right)$ é um L-aberto básico em X com $g(x) \not\leq p$.

Como $f(x) \not\leq p$ temos que $f_{j_i}(x_{j_i}) \not\leq p$ para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$. Da compacidade local de cada X_{j_i}, existem L-abertos g_{j_i} em X_{j_i} e L-conjuntos k_{j_i} em X_{j_i}, com $\chi_{supp(k_{j_i})}$ compacto, tais que $g_{j_i}(x_{j_i}) \not\leq p$ e $g_{j_i} \leq k_{j_i} \leq f_{j_i}$.

Sejam $g = \wedge_{i=1}^{m}\pi_{j_i}^{-1}(g_{j_i})$ e $k = \wedge_{i=1}^{m}\pi_{j_i}^{-1}(k_{j_i})$, então, g é um L-aberto em X, $g \leq k \leq f$ e

$$g(x) = \wedge_{i=1}^{m}\pi_{j_i}^{-1}(g_{j_i})(x) = \wedge_{i=1}^{m} g_{j_i}(x_{j_i}) \not\leq p$$

Também temos

$$\chi_{supp(k)} = \chi_{supp\left(\wedge_{i=1}^{m}\pi_{j_i}^{-1}(k_{j_i})\right)} = \wedge_{i=1}^{m}\pi_{j_i}^{-1}\left(\chi_{supp(k_{j_i})}\right) = \wedge_{j \in J}\pi_j^{-1}(w_j)$$

onde $w_{j_i} = \chi_{supp(k_{j_i})}$ para $i \in \{1, \cdots, m\}$ e $w_j = X_j$ para $j \notin \{j_1, \cdots, j_m\}$. Então $\chi_{supp(k)}$ é um L-conjunto compacto em X pelo teorema 2.10, pois $\chi_{supp(k_{j_i})}$ é compacto para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$ e X_j é compacto para cada $j \notin \{j_1, \cdots, j_m\}$. ■

Teorema 3.13 *Seja $\{X_j\}_{j\in J}$ uma família de espaços L-topológicos totalmente estratificado. Então: O espaço L-topológico produto $\prod_{j\in J} X_j$ é fracamente localmente compacto se e somente se X_j é fracamente localmente compacto para cada $j \in J$ e X_j é compacto para cada $j \in J - J_1$ onde J_1 é um subconjunto finito de J.*

Demonstração. A demonstração é análoga a do teorema 3.12, então daremos apenas uma idéia da demonstração. Seja $X = \prod_{j\in J} X_j$.

Necessidade: A compacidade local de cada X_j é do teorema 3.5. Para o restante basta usar a compacidade local fraca para obter um L-aberto g in X e um L-conjunto k em X, com $\chi_{supp(k)}$ compacto, tais que $g(x) \not\leq p$ e $g \leq k$.

Suficiência: Para $p \in pr(L)$ e $x \in \prod_{j\in J} X_j$ usar a compacidade local fraca de X_j, $j \in J_1 = \{j_1, \cdots j_m\}$ onde J_1 é o conjunto de índices onde X_j não é compacto, para obter L-abertos g_{j_i} em X e L-conjuntos k_{j_i} em X, com $\chi_{supp(k_{j_i})}$ compactos, tais que $g_{j_i}(x_{j_i}) \not\leq p$ e $g_{j_i} \leq k_{j_i}$. Para o restante da demonstração fazer $g = \wedge_{i=1}^{m} \pi_{jl_i}^{-1}(g_{j_i})$ e $k = \wedge_{i=1}^{m} \pi_{j_i}^{-1}(k_{j_i})$. ■

Teorema 3.14 *Se $\langle X, T\rangle$ é um espaço L-topológico fracamente localmente compacto e Hausdorff então $\langle X, T\rangle$ é regular.*

Demonstração. Sejam $x \in X$, $p \in pr(L)$ e h um L-conjunto fechado tal que $h(x) = 0$ e existe $y_0 \in X$ com $h(y_0) \geq p'$.

Vamos mostrar que existem $u, v \in T$ tais que $u(x) \not\leq p$, $v(y) \not\leq p$ para cada $y \in X$ com $h(y) \geq p'$, e, $u(z) = 0$ ou $v(z) = 0$ para cada $z \in X$.

Pela compacidade local fraca de $\langle X, T\rangle$ existem $f \in T$ e $k \in L^X$, com $\chi_{supp(k)}$ compacto, tais que $f(x) \not\leq p$ e $f \leq k$. Seja $D = supp(k)$, então:

(1) Como $f(x) \not\leq p$ e $f \leq k$ temos que $k(x) \neq 0$, logo $x \in D$.

(2) Como $f \leq k$ e $k(z) = 0$ para $z \in D^c$ temos que $f(z) = 0$ para $z \in D^c$.

(3) Como χ_D é compacto e $\langle X, T\rangle$ é Hausdorff temos que χ_D é um L-fechado, teorema 2.13. Logo, $\chi'_D = \chi_{D^c}$ é um L-aberto.

Sendo χ_D compacto e $\langle X, T\rangle$ Hausdorff, o espaço L-topológico $\langle D, T_D\rangle$ é compacto e Hausdorff, logo $\langle D, T_D\rangle$ é regular pelo teorema 2.18.

Caso 1: Existe $y \in D$ tal que $h(y) \geq p'$.

Neste caso, por (1) e pela regularidade de $\langle D, T_D\rangle$, existem $u_D, v_D \in T_D$ tais que $u_D(x) \nleq p$, $v_D(z) \nleq p$ para cada $z \in D$ com $h(z) \geq p'$, e, $u_D(z) = 0$ ou $v_D(z) = 0$ para cada $z \in D$. Sejam $u^*, v^* \in T$ tais que $u^*|_D = u_D$ e $v^*|_D = v_D$, e defina $u = u^* \wedge f$ e $v = v^* \vee \chi_{D^c}$. Temos então que:

(a) $u \in T$ pois $u^*, f \in T$, e $v \in T$ pois $v^* \in T$ e de (3).

(b) Temos que $u^*(x) = u_D(x) \nleq p$ pois $x \in D$, logo $u(x) \nleq p$ pois $f(x) \nleq p$ e $p \in pr(L)$.

(c) Seja $z \in X$ tal que $h(z) \geq p'$.

$$z \in D \;\Rightarrow\; v(z) = v^*(z) = v_D(z) \nleq p$$
$$z \in D^c \;\Rightarrow\; \chi_{D^c}(z) = 1 \nleq p \Rightarrow v(z) = \chi_{D^c}(z) \nleq p$$

(d) Seja $z \in X$ tal que $u(z) \neq 0$, então, $u^*(z) \neq 0$ e $f(z) \neq 0$. Por (2), $z \in D$, então $u_D(z) = u^*(z) \neq 0$, logo $v^*(z) = v_D(z) = 0$. Segue que

$$v(z) = v^*(z) \vee \chi_{D^c}(z) = 0 \vee 0 = 0$$

Caso 2: Não existe $y \in D$ tal que $h(y) \geq p'$.

Sejam $u = f$ e $v = \chi_{D^c}$, então $u, v \in T$ e:

(a) $u(x) = f(x) \nleq p$

(b) Seja $z \in X$ tal que $h(z) \geq p'$, então $z \in D^c$ pois estamos supondo neste caso que não existe $z \in D$ com $h(z) \geq p'$, logo $\chi_{D^c}(z) = 1$. Segue que $v(z) = 1 \nleq p$.

(c) Seja $z \in X$ tal que $u(z) = f(z) \neq 0$, então por (2), $z \in D$, logo $v(z) = \chi_{D^c}(z) = 0$.

Portanto $\langle X, T \rangle$ é regular. ■

De um modo análogo obtemos a regularidade para espaços de Hausdorff localmente compactos e Hausdorff relativamente localmente compactos pois os teoremas 3.7 e 3.10 garantem que estes espaços são fracamente localmente compactos.

O que segue é baseado em [9].

Seja $\langle X, T_X \rangle$ um espaço L-topológico que não seja compacto, mas fracamente localmente compacto e Hausdorff. Considere o conjunto $Y = X \cup \{\infty\}$ com topologia T_Y gerada pela subbase

$$\mathbb{S} = \left\{ f_1 \in L^Y \ ; \ f \in T_X \right\} \cup \left\{ \chi_{B_\infty} \in L^Y \ ; \ \chi_B \in \mathbb{C} \right\}$$

onde:

(i) $f_1 \in L^Y$ é definida por:

$$f_1(y) = \begin{cases} f(y) & \text{se } y \in X \\ 0 & \text{se } y = \infty \end{cases}$$

(ii) $\mathbb{C} = \left\{ \chi_B \in L^X \ ; \ B \subset X, \ \chi_B \text{ compacto} \right\}$

(iii) Para $\chi_B \in \mathbb{C}$, definimos $B_\infty = (X - B) \cup \{\infty\}$, logo:

$$\chi_{B_\infty}(y) = \begin{cases} 1 \text{ se } y \in B_\infty \\ 0 \text{ se } y \in B. \end{cases}$$

O espaço L-topológico $\langle Y, T_Y \rangle$ é a compactificação por um ponto de $\langle X, T_X \rangle$.

Teorema 3.15 *Sejam $\langle X, T_X \rangle$ um espaço L-topológico fracamente localmente compacto Hausdorff, que não seja compacto, e $\langle Y, T_Y \rangle$ sua compactificação por um ponto. Então, $\langle Y, T_Y \rangle$ é compacto, Hausdorff, $cl(X) = Y$ e tem $\langle X, T_X \rangle$ como subespaço.*

Demonstração.

(i) Mostraremos que $\langle X, T_X \rangle$ é subespaço de $\langle Y, T_Y \rangle$.

Seja $f \in T_X$, então $f = f_1|_X$, onde $f_1 \in \mathbb{S}$ é definida por

$$f_1(y) = \begin{cases} f(y) & \text{se } y \in X \\ 0 & \text{se } y = \infty \end{cases}$$

Logo, $f \in T_Y|_X$.

Seja $f_1 \in T_Y$, então, $f_1|_X = f$ onde $f \in T_X$. Logo, $f_1|_X \in T_X$.

Seja $\chi_{B_\infty} \in T_Y$, então, $\chi_{B_\infty}|_X = \chi_{X-B}$. Sendo χ_B compacto em X e X Hausdorff, temos que χ_B é L-fechado, ou seja, χ'_B é L-aberto. Mas $\chi'_B = \chi_{X-B}$, portanto, $\chi_{B_\infty}|_X \in T_X$.

(ii) Mostraremos que $cl(X) = Y$.

Suponha que $cl(X) \neq Y$, então $cl(X)$ é da forma:

$$cl(X)(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in X \\ l \neq 1 & \text{se } y = \infty \end{cases}$$

Temos então que $cl(X)'$ é um L-aberto definido por:

$$cl(X)'(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \in X \\ l' \neq 0 & \text{se } y = \infty \end{cases}$$

Seja $f = \chi_{B_{1\infty}} \wedge \cdots \wedge \chi_{B_{n\infty}}$ um aberto básico tal que $f \leq cl(X)'$ onde $B_1, \cdots, B_n$ são subconjuntos de X com $\chi_{B_1}, \cdots, \chi_{B_1}$ compactos. Temos então para $y = \infty$ que $f(y) = 1 \leq cl(X)'(y)$, logo $l' = 1$, ou seja, $l = 0$.

Temos também:

$$\begin{aligned} f \leq cl(X)' \ &\Rightarrow\ \chi_{B_{1\infty}} \wedge \cdots \wedge \chi_{B_{n\infty}} \leq cl(X)' \\ &\Rightarrow\ cl(X) \leq \chi'_{B_{1\infty}} \vee \cdots \vee \chi'_{B_{n\infty}}. \end{aligned}$$

Como $X \leq cl(X)$ e $\chi'_{B_{i\infty}}|_X = \chi_{B_i}$, temos $X \leq \chi_{B_1} \vee \cdots \vee \chi_{B_n}$, logo, $X = \chi_{B_1} \vee \cdots \vee \chi_{B_n}$. Como a união finita de compactos é compacto e cada χ_{B_i} é compacto, temos que X é compacto, um absurdo.

(iii) Mostraremos que $\langle Y, T_Y\rangle$ é compacto.

Seja $p \in pr(L)$ e $\mathbb{B} = \{f_j\}_{j\in J}$ uma família de L abertos subbasicos, $f_j \in \mathbb{S}$, tais que $(\vee_{j\in J} f_j)(y) \not\leq p$ para cada $y \in Y$. Então existe $j \in J$ tal que f_j é da forma $f_j = \chi_{B_\infty}$ com $B \subset X$ e χ_B compacto, pois caso contrário, $(\vee_{j\in J} f_j)(\infty) = 0 \leq p$.

Seja $\mathbb{B}_1 = \{f_j|_X\}_{j\in J_1}$ onde $J_1 = \{j \in J \,;\, f_j \neq \chi_{B_\infty}\}$, então $\mathbb{B}_1$ é tal que $(\vee_{j\in J_1} f_j|_X)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$ com $\chi_B(x) \geq p'$. De fato:

$$\begin{aligned}
x \in X,\ \chi_B(x) \geq p' &\Rightarrow x \in B \subset Y \\
&\Rightarrow (\vee_{j\in J} f_j)(x) \not\leq p \\
&\Rightarrow \chi_{B_\infty}(x) \vee (\vee_{j\in J_1} f_j)(x) \not\leq p \\
&\Rightarrow (\vee_{j\in J_1} f_j)(x) \not\leq p \text{ pois } \chi_{B_\infty}(x) = 0 \leq p \\
&\Rightarrow (\vee_{j\in J_1} f_j|_X)(x) \not\leq p
\end{aligned}$$

Pela compacidade de χ_B existe um subconjunto finito J_2 de J_1 tal que $(\vee_{j\in J_2} f_j|_X)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$ com $\chi_B(x) \geq p'$. Então, $(\chi_{B_\infty} \vee \vee_{j\in J_2} f_j)(y) \not\leq p$ para cada $y \in Y$. De fato, seja $y \in Y$ então:

$$\begin{aligned}
y \in B &\Rightarrow y \in X \text{ e } \chi_B(y) \geq p' \\
&\Rightarrow (\vee_{j\in J_2} f_j|_X)(y) \not\leq p \\
&\Rightarrow (\chi_{B_\infty} \vee \vee_{j\in J_2} f_j)(y) \not\leq p
\end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned}
y \in B_\infty &\Rightarrow \chi_{B_\infty}(y) = 1 \not\leq p \\
&\Rightarrow (\chi_{B_\infty} \vee \vee_{j\in J_2} f_j)(y) \not\leq p
\end{aligned}$$

(iv) Mostraremos que $\langle Y, T_Y\rangle$ é Hausdorff.

Sejam $x \neq y$ em Y e $p, q \in pr(L)$. Caso $x, y \in X$, temos pelo fato de X ser Hausdorff, que existem $f, g \in T_X$ tais que $f(x) \not\leq p$, $g(y) \not\leq q$, e, $f(z) = 0$ ou $g(z) = 0$ para cada $z \in X$. Definindo

$$f_1(y) = \begin{cases} f(y) & \text{se } y \in X \\ 0 & \text{se } y = \infty \end{cases} \quad , \quad g_1(y) = \begin{cases} g(y) & \text{se } y \in X \\ 0 & \text{se } y = \infty \end{cases}$$

temos que $f_1 \in T_Y$, $g_1 \in T_Y$, e, $f_1(z) = 0$ ou $g_1(z) = 0$ para cada $z \in Y$.

Caso $x \in X$ e $y = \infty$, pela compacidade local fraca de $\langle X, T_X\rangle$ existem $f \in T_X$

e $k \in L^X$, com $\chi_{supp(k)}$ compacto, tais que $f(x) \nleq p$ e $f \leq k$. Seja $B = supp(k)$ and

$$f_1(y) = \begin{cases} f(y) & \text{se } y \in X \\ 0 & \text{se } y = \infty \end{cases}$$

então $f_1 \in T_Y$ e $\chi_{B_\infty} \in T_Y$.

Segue que $f_1(x) = f(x) \nleq p$ e $\chi_{B_\infty}(y) = 1 \nleq q$. Também temos:

(a) $z \in B \Rightarrow \chi_{B_\infty}(z) = 0$

(b) $z \in X - B = X - supp(\overline{k}) \Rightarrow \overline{k}(z) = 0 \Rightarrow f_1(z) = f(z) = 0$

(c) $z = \infty \Rightarrow f_1(z) = 0$

isto é, para cada $z \in Y$, $f_1(z) = 0$ ou $\chi_{B_\infty}(z) = 0$.

Estas condições demonstram o teorema. ■

De um modo análogo podemos obter teoremas de compactificação por um ponto para espaços localmente compactos e relativamente localmente compactos pois os teoremas 3.7 e 3.10 garantem que estes espaços são fracamente localmente compactos.

Capítulo 4

Teorema da L-Caixa

Em topologia geral existe um resultado simples envolvendo produto finito de compactos.

Teorema 4.1 *[15, Munkres] Sejam $\langle X, \delta\rangle$ um espaço topológico e A um compacto em X. Considere X^n com a topologia produto. Se W é um aberto em X^n tal que $A^n \subset W$ então existe $V \in \delta$ tal que $A \subset V$ e $A^n \subset V^n \subset W$.*

Neste capítulo apresentamos uma versão deste teorema para um espaço L-topológico que chamaremos do"teorema da L-caixa". Assumimos aqui que os conjuntos X, Y e X_j são não vazios e que L é um reticulado fuzzy com a topologia Scott.

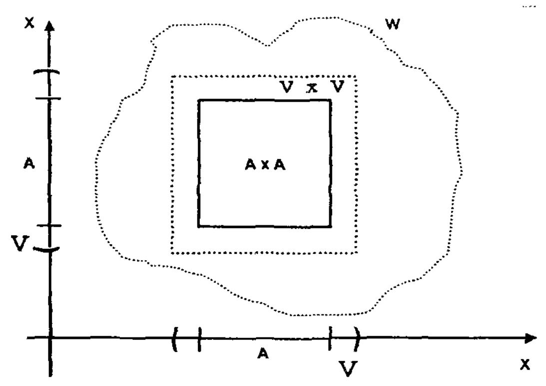

Figura 4.1: Teorema 4.1

4.1 Teorema da L-caixa

Lema 4.1 *Sejam $\langle X, T_X\rangle$ e $\langle Y, T_Y\rangle$ espaços L-topologicos, $h \in L^Y$ um L-conjunto compacto, $x_0 \in X$ e $p \in pr(L)$. Considere $X \times Y$ com a L-topologia produto T. Se $N \in T$ é tal que*

$$\forall y \in Y,\ h(y) \geq p' \Rightarrow N(x_0, y) \nleq p$$

então, existem L-conjuntos $f \in T_X$ e $g \in T_Y$ tais que:

(i) $f(x_0) \nleq p$.

(ii) $\forall y \in Y,\ h(y) \geq p' \Rightarrow g(y) \nleq p$.

(iii) $\forall (x,y) \in X \times Y,\ \left(\pi_1^{-1}(f) \wedge \pi_2^{-1}(g)\right)(x,y) \nleq p \Rightarrow N(x,y) \nleq p$.

Demonstração. Como $N \in T$, podemos escrever $N = \vee_{j \in J}\left(\pi_1^{-1}(f_j) \wedge \pi_2^{-1}(g_j)\right)$ onde $f_j \in T_X$ e $g_j \in T_Y$. Seja $y \in Y$ com $h(y) \geq p'$ então $N(x_0, y) \nleq p$, logo, existe $j_y \in J$ tal que $f_{j_y}(x_0) \nleq p$ e $g_{j_y}(y) \nleq p$.

Seja $J_1 = \{j_y \in J\ ;\ y \in Y,\ h(y) \geq p'\}$, então a família $\{g_j\}_{j \in J_1}$ é tal que $(\vee_{j \in J_1} g_j)(y) \nleq p$ para cada $y \in Y$ com $h(y) \geq p'$. Pela compacidade de h, existe $J_2 \subset_{<\infty} J_1$, tal que $(\vee_{j \in J_2} g_j)(y) \nleq p$ para cada $y \in Y$ com $h(y) \geq p'$.

Seja $f = \wedge_{j \in J_2} f_j$ e $g = \vee_{j \in J_2} g_j$, então $f \in T_X$, $g \in T_Y$ e:

(i) Para cada $j \in J_2$, $f_j(x_0) \nleq p$, logo $f(x_0) \nleq p$.

(ii) Seja $y \in Y$ com $h(y) \geq p'$, então $(\vee_{j \in J_2} g_j)(y) \nleq p$, logo $g(y) \nleq p$.

(iii) Seja $(x,y) \in X \times Y$ tal que $\left(\pi_1^{-1}(f) \wedge \pi_2^{-1}(g)\right)(x,y) \nleq p$, então $f(x) \nleq p$ e $g(y) \nleq p$. Pelas definições de f e g, existe $j \in J_2$ com $f_j(x) \nleq p$ e $g_j(y) \nleq p$. Logo, $\left(\pi_j^{-1}(f_j) \wedge \pi_j^{-1}(g_j)\right)(x,y) \nleq p$. Portanto, $N(x,y) \nleq p$.

Estas condições demonstram o teorema. ■

Lema 4.2 *Sejam $\langle X, T_X\rangle$ e $\langle Y, T_Y\rangle$ espaços L-topologicos, $g \in L^X$ e $h \in L^Y$ L-conjuntos compactos, e $p \in pr(L)$. Considere $X \times Y$ com a L-topologia produto*

T. Se $N \in T$ é tal que

$$\forall (x,y) \in X \times Y,\ \left(\pi_1^{-1}(g) \wedge \pi_2^{-1}(h)\right)(x,y) \geq p' \Rightarrow N(x,y) \not\leq p$$

então, existem $f \in T_X$ e $k \in T_Y$ tais que:

(i) $\forall x \in X,\ g(x) \geq p' \Rightarrow f(x) \not\leq p.$

(ii) $\forall y \in Y,\ h(y) \geq p' \Rightarrow k(y) \not\leq p.$

(iii) $\forall (x,y) \in X \times Y,\ \left(\pi_1^{-1}(f) \wedge \pi_2^{-1}(k)\right)(x,y) \not\leq p \Rightarrow N(x,y) \not\leq p.$

Demonstração. Como $N \in T$, podemos escrever $N = \vee_{j\in J}\left(\pi_1^{-1}(f_j) \wedge \pi_2^{-1}(g_j)\right)$. Seja $X_1 = \{x \in X\ ;\ g(x) \geq p'\}$, e fixe $x_0 \in X_1$. Então para $y \in Y$ com $h(y) \geq p'$ temos $\left(\pi_1^{-1}(g) \wedge \pi_2^{-1}(h)\right)(x_0,y) \geq p'$, logo, $N(x_0,y) \not\leq p$.

Pelo lema 4.1 existem $f_{x_0} \in T_X$ e $g_{x_0} \in T_Y$ tais que:

(1) $f_{x_0}(x_0) \not\leq p.$

(2) $y \in Y,\ h(y) \geq p' \Rightarrow g_{x_0}(y) \not\leq p.$

(3) $\forall (x,y) \in X \times Y,\ \left(\pi_1^{-1}(f_{x_0}) \wedge \pi_2^{-1}(g_{x_0})\right)(x,y) \not\leq p \Rightarrow N(x,y) \not\leq p.$

Por (1), a família $\{f_x\}_{x\in X_1}$ é tal que $(\vee_{x\in X_1} f_x)(x_0) \not\leq p$ para cada $x_0 \in X_1$. Pela compacidade de g, existe $X_2 \subset_{<\infty} X_1$ tal que $(\vee_{x\in X_2} f_x)(x_0) \not\leq p$ para cada $x_0 \in X_1$.

Seja $f = \vee_{x\in X_2} f_x$ e $k = \wedge_{x\in X_2} g_x$, então, $f \in T_X$, $k \in T_Y$ e:

(i) Seja $x \in X$ com $g(x) \geq p'$, então $x \in X_1$, logo $(\vee_{x\in X_2} f_x)(x_0) \not\leq p$, isto é, $f(x) \not\leq p$.

(ii) Seja $y \in Y$ com $h(y) \geq p'$, então para cada $x \in X_2$, $g_x(y) \not\leq p$ por (2), logo $k(y) \not\leq p$.

(iii) Seja $(x,y) \in X \times Y$ com $\left(\pi_1^{-1}(f) \wedge \pi_2^{-1}(k)\right)(x,y) \not\leq p$, então $f(x) \not\leq p$ e $k(y) \not\leq p$. Pelas definições de f e k, existe $x_0 \in X_2$ com $f_{x_0}(x) \not\leq p$ e $g_{x_0}(y) \not\leq p$, então $\left(\pi_1^{-1}(f_{x_0}) \wedge \pi_2^{-1}(g_{x_0})\right)(x,y) \not\leq p$. Portanto, por (3), $N(x,y) \not\leq p$.

Estas condições demonstram o teorema. ■

Lema 4.3 *Sejam* $\{(X_j, T_j)\}_{j=1}^{n}$, $n \geq 2$, *uma família de espaços L-topológicos,* $\{h_j\}_{j=1}^{n}$ *uma família de L-conjuntos compactos onde cada* $h_j \in L^{X_j}$ *e* $p \in pr(L)$. *Considere* $\mathbb{X} = \prod_{j=1}^{n} X_j$ *com a L-topologia produto T. Se* $N \in T$ *é tal que*

$$\forall x \in \mathbb{X}, \ \left(\wedge_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(h_j)\right)(x) \geq p' \Rightarrow N(x) \not\leq p$$

então existe uma família $\{f_j\}_{j=1}^{n}$ *onde cada* $f_j \in T_{X_j}$ *tal que:*

(i) *Para cada* $j = 1, \cdots, n$ *temos:* $\forall y \in X_j,\ h_j(y) \geq p' \Rightarrow f_j(y) \not\leq p$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{X},\ \left(\wedge_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(f_j)\right)(x) \not\leq p \Rightarrow N(x) \not\leq p$.

Demonstração. Provaremos o teorema por indução. Para o produto de 2 L-conjuntos compactos ver o teorema 4.2. Suponha então que o teorema seja válido para o produto de $n-1$ L-conjuntos compactos.

Sejam $g = \wedge_{j=1}^{n-1} \pi_j^{-1}(h_j)$ e $X = \prod_{j=1}^{n-1} X_j$ o L-espaço produto. Então g é um L-conjunto compacto em X. Sejam $Y = X_n$ e $h = h_n$.

Seja $(x, y) \in X \times Y$ tal que $\left(\pi_1^{-1}(g) \wedge \pi_2^{-1}(h)\right)(x, y) \geq p'$, então $g(x) \geq p'$ e $h_n(y) \geq p'$. Seja $x = (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in X$. Como $g(x) \geq p'$, $\wedge_{j=1}^{n-1} h_j(x_j) \geq p'$, então $\left(\wedge_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(h_j)\right)(x, y) \geq p'$, logo, $N(x, y) \not\leq p$.

Pelo lema 4.2, existe um L-conjunto $f \in T_X$ e $f_n \in T_Y$ tal que:

(1) $x \in X,\ g(x) \geq p' \Rightarrow f(x) \not\leq p$.

(2) $y \in Y,\ h_n(y) \geq p' \Rightarrow f_n(y) \not\leq p$.

(3) $\forall (x, y) \in X \times Y,\ \left(\pi_1^{-1}(f) \wedge \pi_2^{-1}(f_n)\right)(x, y) \not\leq p \Rightarrow N(x, y) \not\leq p$.

Sendo $g = \wedge_{j=1}^{n-1} \pi_j^{-1}(h_j)$, por (1) podemos usar que o teorema é válido para $n-1$ L-conjuntos compactos para obter L-abertos $f_j \in T_j$, $j = 1, \cdots, n-1$, tais que:

(4) $\forall y \in X_j,\ h_j(y) \geq p' \Rightarrow f_j(y) \not\leq p$.

(5) $\forall x \in X,\ \left(\wedge_{j=1}^{n-1} \pi_j^{-1}(f_j)\right)(x) \not\leq p \Rightarrow f(x) \not\leq p$.

Considere a família $\{f_j\}_{j=1}^{n}$ com cada $f_j \in T_j$. Temos:

(i) De (2) e (4), para cada $j = 1, \cdots, n$ temos: $\forall y \in X_j,\ h_j(y) \geq p' \Rightarrow f_j(y) \not\leq p$.

(ii) Seja $x = (z, x_n) \in \mathbb{X}$ tal que $\left(\wedge_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(f_j)\right)(x) \not\leq p$, então $\left(\wedge_{j=1}^{n-1} \pi_j^{-1}(f_j)\right)(z) \not\leq p$ e $f_n(x_n) \not\leq p$. De (5), $f(z) \not\leq p$, então $\left(\pi_1^{-1}(f) \wedge \pi_2^{-1}(f_n)\right)(z, x_n) \not\leq p$. Logo, de (3), $N(x) \not\leq p$.

Estas condições demonstram o teorema. ■

Teorema 4.2 *(Teorema da L-Caixa) Sejam $\langle X, T_X \rangle$ um espaco L-topológico, $h \in L^X$ um L-conjunto compacto e $p \in pr(L)$. Considere X^n com a L-topologia produto T. Se $N \in T$ é tal que*

$$\forall x \in X^n,\ \left(\wedge_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(h)\right)(x) \geq p' \Rightarrow N(x) \not\leq p$$

então, existe um L-conjunto $f \in T_X$ tal que:

(i) $\forall y \in X,\ h(y) \geq p' \Rightarrow f(y) \not\leq p$.

(ii) $\forall x \in X^n,\ \left(\wedge_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(f)\right)(x) \not\leq p \Rightarrow N(x) \not\leq p$.

Demonstração. Para $j = 1, \cdots, n$ seja $h_j = h$, então pelo lema 4.3, existe uma família $\{f_j\}_{j=1}^{n}$ onde cada $f_j \in T_X$ tal que:

(1) $\forall y \in X,\ h_j(y) \geq p' \Rightarrow f_j(y) \not\leq p$.

(2) $\forall x \in X^n,\ \left(\wedge_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(f_j)\right)(x) \not\leq p \Rightarrow N(x) \not\leq p$.

Seja $f = \wedge_{j=1}^{n} f_j$, então $f \in T_X$ e temos:

(i) Seja $y \in X$ tal que $h(y) \geq p'$, então, de (1), para cada $j = 1, \cdots, n$, $f_j(y) \not\leq p$. Portanto, $f(y) \not\leq p$.

(ii) Seja $x \in X^n$ tal que $\left(\wedge_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(f)\right)(x) \not\leq p$, então, para cada $j = 1, \cdots, n$, $f(x_j) \not\leq p$. Logo, para cada $j = 1, \cdots, n$, $f_j(x_j) \not\leq p$, ou seja, $\pi_j^{-1}(f_j)(x) \not\leq p$. Portanto $\left(\wedge_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(f_j)\right)(x) \not\leq p$. De (2), temos então que $N(x) \not\leq p$.

Fica assim demonstrado o teorema da L-caixa. ■

Capítulo 5

Propriedades de Recobrimento: Hurewicz e ω^*

As propriedades de recobrimento Hurewicz e ω^* se enquadram dentro do que Scheepers chama em seus artigos de "princípio de seleção". Tal principio diz o seguinte: Dada uma classe de objetos Γ e uma classe de objetos Δ, mediante um certo procedimento Π podemos obter para cada objeto $A \in \Gamma$ um objeto $\Pi(A) \in \Delta$.

Um exemplo conhecido de propriedade que se enquadra neste princípio é a compacidade. Seja

$\Gamma = \Delta = \{\text{coberturas abertas}\}$

$\Pi =$ existir subcobertura finita.

Dizemos que um espaço topológico X é compacto se e somente se satisfaz o principo de seleção acima, isto é, $X \in \Pi(\Gamma, \Delta)$.

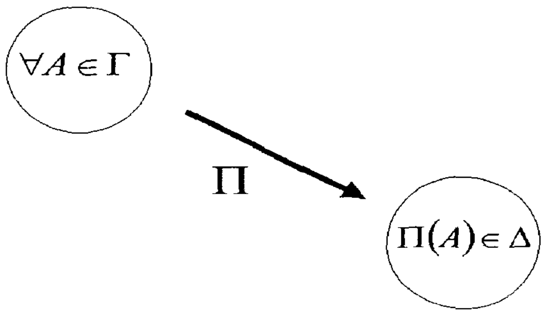

Figura 5.1: Princípio de seleção

Vamos inicialmente relembrar as definições de espaços de Hurewicz e a propriedade ω^* e verificar como se enquadram dentro do principio de seleção.

Definição 5.1 *[8, Hurewicz] Um espaço topologico $\langle X, \delta \rangle$ é Hurewicz se e somente se para cada sequência $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de coberturas abertas de X, existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:*

(i) *Cada* $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.

(ii) $\forall x \in X$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $n > n_0 \Rightarrow (\exists V \in \mathbb{V}_n,\ x \in V)$.

Aqui tomamos

Γ = sequências de coberturas abertas.

Δ = seqûencias $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde cada $\mathbb{V}_n$ é formado por finitos abertos.

Π = existir um elemento de Δ satisfazendo as propriedades (i) e (ii).

Uma ilustração desta propriedade pode ser vista na figura ?? com $F = \{x\}$.

Definição 5.2 *Uma ω^* cobertura em X é uma família de abertos $\mathbb{U}$ tal que para cada subconjunto finito F de X, existe $V \in \mathbb{U}$ com $F \subset V$*

Definição 5.3 *Um espaço topológico $\langle X, \delta \rangle$ tem a propriedade ω^* se e somente se para cada sequência $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de ω^* coberturas de X existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:*

(i) *Cada* $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.

(ii) $\forall F \subset_{<\infty} X$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $n > n_0 \Rightarrow \exists V \in \mathbb{V}_n,\ F \subset V$

Aqui tomamos

Γ = sequências de ω^*-coberturas abertas.

Δ = seqûencias $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde cada $\mathbb{V}_n$ é formado por finitos abertos.

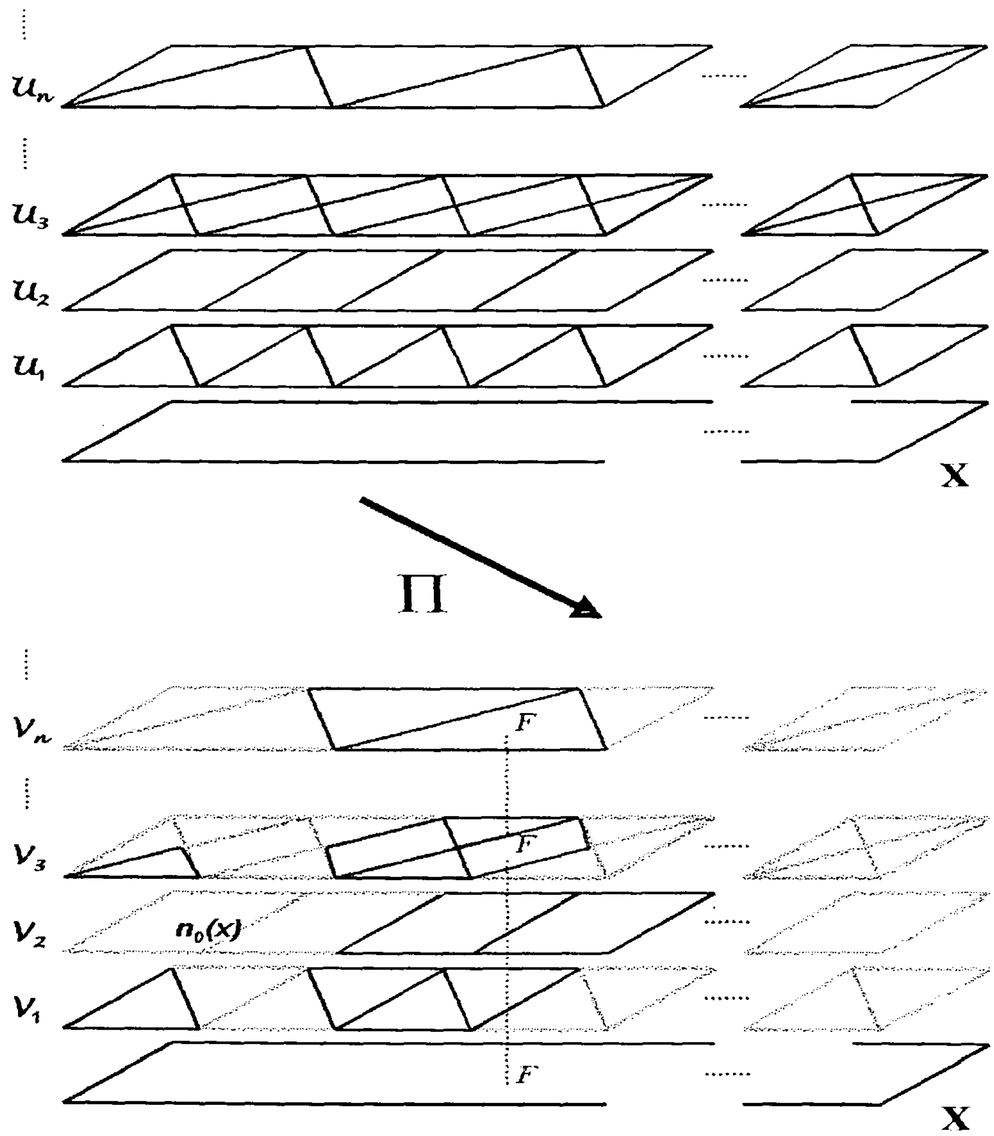

Figura 5.2: Espaços de Hurewicz e propriedade ω^*

$\Pi =$ existir um elemento de Δ satisfazendo as propriedades (i) e (ii).

Uma ilustração desta propriedade pode ser vista na figura ??.

Dividimos este capítulo em três seções.

Nas duas primeiras seções propomos boas definições para as propriedades de Hurewicz e ω^* em um espaço L-topológico. Na última seção apresentamos um teorema que garante condições necessarias e suficientes para que um espaço tenha a propriedade ω^* utilizando-se da propriedade de Hurewicz.

Assumimos neste capítulo que X é um conjunto não vazio e que L é um reticulado fuzzy com a topologia Scott. Vamos usar também a notação $A \subset_{<\infty} B$ como abreviação para "A é um subconjunto finito de B".

5.1 Espaços de Hurewicz

Definição 5.4 *Um espaço L-topológico X é Hurewicz se e somente se para cada $p \in pr(L)$ e sequência $\{\mathbb{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de famílias de L-abertos tal que $(\vee_{f\in\mathbb{F}_n} f)(x) \not\leq p$ para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:*

(i) *Cada $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{F}_n$.*

(ii) $\forall x \in X$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $(n > n_0 \Rightarrow \exists h \in \mathbb{H}_n,\ h(x) \not\leq p)$.

Teorema 5.1 *O espaço topológico $\langle X, \delta\rangle$ é Hurewicz se e somente se o espaço L-topológico $\langle X, \omega(\delta)\rangle$ é Hurewicz.*

Demonstração. *Necessidade:* Seja $p \in pr(L)$ e $\{\mathbb{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência onde cada $\mathbb{F}_n = \{f_{nj}\}_{j\in J_n}$ é uma família de L-abertos tal que $(\vee_{j\in J_n} f_{nj})(x) \not\leq p$ para todo $x \in X$.

Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida por $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$ onde

$$U_{nj} = f_{nj}^{-1}\{t \in L\,;\, t \not\leq p\}.$$

Então cada $\mathbb{U}_n$ é uma cobertura aberta para X pois:

$$x \in X \Rightarrow (\vee_{j\in J_n} f_{nj})(x) \not\leq p \Rightarrow \exists j \in J_n,\ f_{nj}(x) \not\leq p \Rightarrow x \in U_{nj}$$

Como $\langle X, \delta\rangle$ é Hurewicz, existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) Cada $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.

(2) $\forall x \in X$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $n > n_0 \Rightarrow (\exists V \in \mathbb{V}_n,\ x \in V)$.

Por (1) podemos escrever $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$ onde $I_n \subset_{<\infty} J_n$. Defina $\mathbb{H}_n = \{f_{nj}\}_{j\in I_n}$, então para a sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ temos:

(i) Cada $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{F}_n$.

(ii) Seja $x \in X$ então, por (2), existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > n_0 \Rightarrow (\exists U_{nj} \in \mathbb{V}_n,\ x \in U_{nj})$$

Logo $f_{nj} \in \mathbb{H}_n$ é tal que $f_{nj}(x) \not\leq p$ pois $x \in U_{nj}$.

Estas condições mostram que o espaço $\langle X, \omega(\delta)\rangle$ é Hurewicz.

Suficiência: Seja $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de coberturas abertas de X onde $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$. Seja $p \in pr(L)$ fixado e considere a sequência $\{\mathbb{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $\mathbb{F}_n = \{f_{nj}\}_{j\in J_n}$ é uma família de L-abertos definidos por $f_{nj} = \chi_{U_{nj}}$.

Seja $x \in X$. Sendo $\mathbb{U}_n$ uma cobertura aberta de X, existe $j \in J_n$ com $x \in U_{nj}$, logo, $f_{nj}(x) = 1 \not\leq p$. Portanto, $(\vee_{j\in J_n} f_{nj})(x) \not\leq p$. Como $\langle X, \omega(\delta)\rangle$ é Hurewicz, existe uma sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) Cada $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{F}_n$.

(2) $\forall x \in X$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $n > n_0 \Rightarrow (\exists h \in \mathbb{H}_n,\ h(x) \not\leq p)$.

Por (1) podemos escrever $\mathbb{H}_n = \{f_{nj}\}_{j\in I_n}$ onde $I_n \subset_{<\infty} J_n$. Defina $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in I_n}$, então para a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ temos que:

(i) Cada $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.

(ii) Seja $x \in X$ então, por (2), existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > n_0 \Rightarrow (\exists f_{nj} \in \mathbb{H}_n,\ f_{nj}(x) \not\leq p)$$

Logo $U_{nj} \in \mathbb{V}_n$ é tal que $x \in U_{nj}$ pois $f_{nj}(x) \not\leq p$.

Estas condições mostram que o espaço $\langle X, \delta\rangle$ é Hurewicz. ■

Definição 5.5 *Sejam $\langle X, T\rangle$ um espaço L-topológico e $g \in L^X$. Dizemos que g é Hurewicz se e somente se para cada $p \in pr(L)$ e sequência $\{\mathbb{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de famílias de L-abertos tais que*

$$\forall x \in X,\ g(x) \geq p' \Rightarrow (\vee_{f\in\mathbb{F}_n} f)(x) \not\leq p$$

existe uma sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(i) *Cada* $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{F}_n$.

(ii) $\forall x \in X$, $g(x) \geq p'$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $n > n_0 \Rightarrow (\exists h \in \mathbb{H}_n;\ h(x) \not\leq p)$.

Teorema 5.2 *Sejam* $\langle X, T\rangle$ *um espaço L-topológico e* $g \in L^X$. *Se* g *é compacto então é Hurewicz.*

Demonstração. Sejam $p \in pr(L)$ e $\{\mathbb{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência onde cada $\mathbb{F}_n = \{f_{nj}\}_{j\in J_n}$ é uma família de L-abertos tal que $(\vee_{j\in J_n} f_{nj})(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$ com $g(x) \geq p'$. Sendo g compacto, existe $J_n^1 \subset_{<\infty} J_n$ tal que $\left(\vee_{j\in J_n^1} f_{nj}\right)(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$ com $g(x) \geq p'$.

Seja $\mathbb{H}_n = \{f_{nj}\}_{j\in J_n^1}$, então a sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:

(i) Cada $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{F}_n$.

(ii) Seja $x \in X$ com $g(x) \geq p'$, fixado $n_0 \in \mathbb{N}$ temos que, para $n > n_0$:

$$\begin{aligned} g(x) \geq p' &\Rightarrow \left(\vee_{j\in J_n^1} f_{nj}\right)(x) \not\leq p \\ &\Rightarrow \left(\exists j \in J_n^1\right)(f_{nj}(x) \not\leq p) \\ &\Rightarrow (\exists f_{nj} \in \mathbb{H}_n)(f_{nj}(x) \not\leq p) \end{aligned}$$

Estas condições mostram que $\langle X, T\rangle$ é Hurewicz. ∎

Teorema 5.3 *Sejam* $\langle X, T\rangle$ *um espaço L-topológico e* $g \in L^X$. *Se* g *é Hurewicz então é Lindelöf.*

Demonstração. Sejam $p \in pr(L)$ e $\mathbb{F} = \{f_j\}_{j\in J}$ uma família de L-abertos tais que $(\vee_{j\in J_n} f_{nj})(x) \not\leq p$ para cada $x \in X$ com $g(x) \geq p'$. Considere a sequência $\{\mathbb{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde $\mathbb{F}_n = \mathbb{F}$. Como g é Hurewicz, existe uma sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) Cada $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{F}_n = \mathbb{F}$.

(2) $\forall x \in X$, $g(x) \geq p'$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $n > n_0 \Rightarrow (\exists h \in \mathbb{H}_n;\ h(x) \not\leq p)$.

Seja $\mathbb{S} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{H}_n$ então, por (1), é um subconjunto enumerável de $\mathbb{F}$. Seja $x \in X$ com $g(x) \geq p'$, por (2) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > n_0 \Rightarrow (\exists h \in \mathbb{H}_n;\ h(x) \nleq p).$$

Mas $\mathbb{H}_n \subset \mathbb{S}$, logo, $h \in \mathbb{S}$ e $h(x) \nleq p$. Portanto, $\langle X, T\rangle$ é Lindelöf. ∎

Teorema 5.4 *Sejam $\langle X, T\rangle$ um espaço L-topológico, Hurewicz, e $g \in L^X$. Se g é L-fechado então é Hurewicz.*

Demonstração. Sejam $p \in pr(L)$ e $\{\mathbb{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência onde cada $\mathbb{F}_n = \{f_{nj}\}_{j\in J_n}$ é uma família de L-abertos tal que $(\vee_{j\in J_n} f_{nj})(x) \nleq p$ para cada $x \in X$ com $g(x) \geq p'$. Seja $\mathbb{F}_n^g = \mathbb{F}_n \cup \{g'\}$. Sendo g L-fechado, cada $\mathbb{F}_n^g$ é uma famíla de L-abertos, e a sequência $\{\mathbb{F}_n^g\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $\left(\vee_{f\in\mathbb{F}_n^g} f\right)(x) \nleq p$ para cada $x \in X$, pois para $x \in X$:

$$g(x) \geq p' \Rightarrow (\vee_{j\in J_n} f_{nj})(x) \nleq p \Rightarrow \left(\vee_{f\in\mathbb{F}_n^g} f\right)(x) \nleq p$$

$$g(x) \ngeq p' \Rightarrow g'(x) \nleq p \Rightarrow \left(\vee_{f\in\mathbb{F}_n^g} f\right)(x) \nleq p$$

Sendo $\langle X, T\rangle$ Hurewicz, existe uma sequência $\{\mathbb{H}_n^g\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) Cada $\mathbb{H}_n^g \subset_{<\infty} \mathbb{F}_n^g$.

(2) $\forall x \in X$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $\forall n > n_0 \Rightarrow (\exists h^g \in \mathbb{H}_n^g;\ h^g(x) \nleq p)$.

Por (1) podemos escrever $H_n^g = \{f_{nj}\}_{n\in J_n^1} \cup \{g'\}$ onde $J_n^1 \subset_{<\infty} J_n$. Considere $\mathbb{H}_n = \{f_{nj}\}_{n\in J_n^1}$, então a sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:

(i) Cada $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{F}_n$.

(ii) Seja $x \in X$ com $g(x) \geq p'$, então, por (2), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > n_0 \Rightarrow \exists h^g \in \mathbb{H}_n^g;\ h^g(x) \nleq p.$$

Caso $h^g = g'$, teriamos que $g'(x) \leq p$ e $g'(x) \nleq p$, logo, h^g não pode ser g'. Segue que $h^g \in \mathbb{H}_n$ e $h^g(x) \nleq p$.

Portanto, g é Hurewicz. ■

Teorema 5.5 *Seja $\langle X, T\rangle$ um espaço L-topológico. Se $g \in L^X$ é Hurewicz e $f : X \to Y$ é uma função sobrejetora e contínua tal que $f^{-1}(y)$ é finito para cada $y \in Y$, então $f(g)$ é Hurewicz.*

Demonstração. Seja $p \in pr(L)$ e $\{\mathbb{F}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência onde cada $\mathbb{F}'_n = \{f_{nj}\}_{j\in J_n}$ é uma família de L-abertos tal que $(\vee_{j\in J_n} f_{nj})(y) \nleq p$ para cada $y \in Y$ com $f(g)(y) \geq p'$. Considere $\mathbb{F}_n = \{g_{nj}\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde cada $g_{nj} = f^{-1}(f_{nj})$. Sendo f contínua, cada g_{nj} é um L-aberto. Seja $x \in X$ e $y = f(x)$ então:

$$\begin{aligned} g(x) \geq p' \quad &\Rightarrow \quad f(g)(y) = \vee\left\{g(x)\,;\, x \in f^{-1}(y)\right\} \geq g(x) \geq p' \\ &\Rightarrow \quad (\vee_{j\in J_n} f_{nj})(y) \nleq p \\ &\Rightarrow \quad (\vee_{j\in J_n} g_{nj})(x) \nleq p \end{aligned}$$

Sendo g Hurewicz, existe uma sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) Cada $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{F}_n$.

(2) $\forall x \in X$, $g(x) \geq p'$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $n > n_0 \Rightarrow (\exists h \in \mathbb{H}_n;\ h(x) \nleq p)$.

Por (1) podemos escrever $\mathbb{H}_n = \{g_{nj}\}_{j\in J_n^1}$ onde $J_n^1 \subset_{<\infty} J_n$. Seja $\mathbb{H}'_n = \{f_{nj}\}_{j\in J_n^1}$, então a sequência $\{H'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que:

(1) Cada $\mathbb{H}'_n \subset_{<\infty} \mathbb{F}'_n$.

(2) Seja $y \in Y$ com $f(g)(y) \geq p'$, então $\vee\{g(x)\,;\, x \in f^{-1}(y)\} \geq p'$. Sendo p' coprimo e $f^{-1}(y)$ finito, existe $x \in f^{-1}(y)$ com $g(x) \geq p'$. Por (2), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > n_0 \Rightarrow (\exists g_{nj} \in \mathbb{H}_n;\ g_{nj}(x) \nleq p).$$

Segue que $f_{nj} \in \mathbb{H}_n$ e $f_{nj}(y) = f^{-1}(f(x)) = g_{nj}(x) \nleq p$

Portanto, $f(g)$ é Hurewicz. ■

Definição 5.6 *Seja $\{\langle X_k, T_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma família de espaços L-topológicos disjuntos. Seja*

$\mathbb{X} = \cup_{k\in\mathbb{N}} X_k$. Defina $T \subset L^{\mathbb{X}}$ por: $f \in T$ se e somente se $f|_{X_k} \in T_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.6 *Na definição 5.6, $T \subset L^X$ define uma L-topologia in $\mathbb{X}$. Com esta L-topologia, chamamos o espaço L-topológico $\langle \mathbb{X}, T\rangle$ de L-espaço soma e denotamos por $\mathbb{X} = \sum_{j\in\mathbb{N}} X_j$.*

Demonstração. É imediato da definição que:

(i) $\emptyset \in T$ e $\mathbb{X} \in T$ pois para cada $j \in \mathbb{N}$, $\emptyset|_{X_j} = \emptyset \in T_j$ e $\mathbb{X}|_{X_j} = X_j \in T_j$.

(ii) Para uma família $\{f_j\}_{j\in J}$ em T, e $f = \vee_{j\in J} f_j$ temos para cada $k \in \mathbb{N}$ que $f|_{X_k} = \vee_{j\in J} f_j|_{X_k} \in T_k$, pois $f_j \in T$.

(iii) Para uma família $\{f_j\}_{j=1}^n$ em T, e $f = \wedge_{j=1}^n f_j$ temos para cada $k \in \mathbb{N}$ que $f|_{X_k} = \wedge_{j=1}^n f_j|_{X_k} \in T_k$, pois $f_j \in T$.

Logo, T é uma L topologia em $\mathbb{X}$. ■

Teorema 5.7 *Seja $\{\langle X_j, T_j\rangle\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma família de espaços L-topológicos. Se cada X_j é Hurewicz, então o L-espaço soma $\mathbb{X} = \sum_{j\in\mathbb{N}} X_j$ é Hurewicz.*

Demonstração. Sejam $p \in pr(L)$ e $\{\mathbb{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência onde cada $\mathbb{F}_n = \{f_{nj}\}_{j\in J_n}$ é uma família de L-abertos em $\mathbb{X}$ tal que $(\vee_{j\in J_n} f_{nj})(x) \nleq p$ para todo $x \in \mathbb{X}$.

Seja $k \in \mathbb{N}$ fixado e considere a sequência $\{\mathbb{F}_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $\mathbb{F}_n^k = \{f_{nj}|_{X_k}\}_{j\in J_n}$. Então, cada $\mathbb{F}_n^k$ é uma família de L-abertos em X_k tal que:

$$x \in X_k \Rightarrow x \in \mathbb{X} \Rightarrow \vee_{j\in J_n} f_{nj}(x) \nleq p \Rightarrow \vee_{j\in J_n} f_{nj}|_{X_k}(x) \nleq p$$

Como para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado, X_k é Hurewicz, existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) Cada $\mathbb{V}_n^k \subset_{<\infty} \mathbb{F}_n^k$.

(2) $\forall x \in X_k$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $m > n_0 \Rightarrow (\exists h \in \mathbb{V}_m^k,\ h(x) \not\leq p)$.

Por (1) podemos escrever $\mathbb{V}_n^k = \{f_{nj}|_{X_k}\}_{j \in J_n^k}$ onde $J_n^k \subset_{<\infty} J_n$. Seja $\mathbb{W}_n^k = \{f_{nj}\}_{j \in J_n^k}$ e defina $\mathbb{H}_n = \cup_{k=1}^n \mathbb{W}_n^k$. Temos:

(i) Cada $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{F}_n$.

(ii) Seja $x \in \mathbb{X}$ e $k \in \mathbb{N}$ um índice tal que $x \in X_k$. Seja $n_1 = \max\{n_0, k\}$ onde n_0 é o índice em (2). Seja $m > n_1$, então, $m > n_0$. Por (2) existe $f_{mj}|_{X_k} \in \mathbb{V}_m^k$ com $f_{mj}|_{X_k}(x) \not\leq p$. Também temos $m > k$, logo $f_{mj}|_{X_k} \in \cup_{k=1}^m \mathbb{V}_m^k$ pois nestas condições $\mathbb{V}_m^k \subset \cup_{k=1}^m \mathbb{V}_m^k$. Portanto, $f_{mj} \in \mathbb{H}_m$ e $f_{mj}(x) \not\leq p$.

Estas condições mostram o L-espaço soma é Hurewicz. ■

5.2 Propriedade ω^*

Definição 5.7 *Seja $X = \langle X, T\rangle$ um espaço L-topologico. Dizemos que X tem a propriedade ω^* se e somente se para cada $p \in pr(L)$ e sequência $\{\mathbb{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de famílias de L-abertos tal que*

$$\forall F \subset_{<\infty} X,\ \exists f \in \mathbb{F}_n;\ \forall x \in F,\ f(x) \not\leq p$$

existe uma sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(i) *Cada $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{F}_n$.*

(ii) $\forall F \subset_{<\infty} X$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $n > n_0 \Rightarrow (\exists h \in \mathbb{H}_n;\ \forall x \in F,\ h(x) \not\leq p)$.

Teorema 5.8 *Seja $\langle X, \delta\rangle$ um espaço topológico, então: $\langle X, \delta\rangle$ tem a propriedade ω^* se e somente se $\langle X, \omega(\delta)\rangle$ tem a propriedade ω^*.*

Demonstração. *Necessidade:* Sejam $p \in pr(L)$ e $\mathbb{F} = \{\mathbb{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de famílias de L-abertos tal que:

$$\forall F \subset_{<\infty} X,\ \exists f \in \mathbb{F}_n;\ \forall x \in F,\ f(x) \not\leq p$$

Suponha que $\mathbb{F}_n = \{f_{nj}\}_{j \in J_n}$ e defina a sequência $\{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$ onde $U_{nj} = f_{nj}^{-1}\{t\,;\, t \not\leq p\}$. Então, para $F \subset_{<\infty} X$ existe $f_{nj} \in \mathbb{F}_n$ com $f_{nj}(x) \not\leq p$ para cada $x \in F$. Logo, $F \subset U_{nj}$.

Como $\langle X, \delta\rangle$ tem a propiedade ω^* existe uma sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) Cada $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.

(2) $\forall F \subset_{<\infty} X$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $n > n_0 \Rightarrow (\exists V \in \mathbb{V}_n;\ F \subset V)$.

Por (1) podemos escrever $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$ onde $J_n \subset_{<\infty} J$. Seja $\mathbb{H}_n = \{f_{nj}\}_{j\in J_n}$, então para a sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ temos:

(i) Cada $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{F}_n$.

(ii) Seja $F \subset_{<\infty} X$, então, por (2), existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > n_0 \Rightarrow (\exists U_{nj} \in \mathbb{V}_n;\ F \subset U_{nj})$$

Logo, $f_{nj}(x) \not\leq p$ para cada $x \in F$.

Portanto, $\langle X, \omega(\delta)\rangle$ tem a propriedade ω^*.

Suficiência: Seja $\mathbb{U} = \{\mathbb{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de famílias de abertos tais que:

$$\forall F \subset_{<\infty} X,\ \exists V \in \mathbb{U}_n;\ F \subset V$$

Seja $\mathbb{U}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$ e defina a sequência $\{\mathbb{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por $\mathbb{F}_n = \{f_{nj}\}_{j\in J_n}$ onde $f_{nj} = \chi_{U_{nj}}$. Então para $F \subset_{<\infty} X$ existe $U_{nj} \in \mathbb{U}_n$ com $F \subset U_{nj}$, logo, para cada $x \in F$, $f_{nj}(x) \not\leq p$.

Como $\langle X, \omega(\delta)\rangle$ tem a propriedade ω^*, existe uma sequência $\{\mathbb{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) Cada $\mathbb{H}_n \subset_{<\infty} \mathbb{F}_n$.

(2) $\forall F \subset_{<\infty} X$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $n > n_0 \Rightarrow (\exists h \in \mathbb{H}_n;\ \forall x \in F,\ h(x) \not\leq p)$.

Por (1), podemos escrever $\mathbb{H}_n = \{f_{nj}\}_{j\in J_n}$ onde $J_n \subset_{<\infty} J$. Seja $\mathbb{V}_n = \{U_{nj}\}_{j\in J_n}$, então para a sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ temos:

(i) Cada $\mathbb{V}_n \subset_{<\infty} \mathbb{U}_n$.

(ii) Seja $F \subset_{<\infty} X$, então, por (2), existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > n_0 \Rightarrow (\exists f_{nj} \in \mathbb{N}_n;\ \forall x \in F,\ f_{nj}(x) \not\leq p)$$

Logo $f_{nj}(x) = 1$ para cada $x \in F$, ou seja, $F \subset U_{nj}$.

Portanto $\langle X, \delta \rangle$ tem a propriedade ω^*. ■

5.3 Teorema Principal

Teorema 5.9 *Seja $X = \langle X, T \rangle$ um espaço L-topologico, então: X tem a propriedade ω^* se e somente se para cada $n \in \mathbb{N}$, X^n é Hurewicz.*

Demonstração. *Necessidade:* Fixe $n \in \mathbb{N}$ e seja $p \in pr(L)$. Seja $\{\mathbb{U}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência onde cada $\mathbb{U}_k = \{f_{nj}\}_{j\in J_k}$ é uma família de L-conjuntos abertos tais que $(\vee_{j\in J_k} f_{kj})(x) \not\leq p$ para cada $x \in X^n$.

Seja $F \subset_{<\infty} X$ e seja $h = \chi_F$, então h é compacto em X pois $supp(h) = F$ é finito [12], e, $\wedge_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(h)$ é compacto em X^n. Portanto, existe $J_k^F \subset_{<\infty} J_k$ tal que:

$$\forall x \in X^n,\ \left(\wedge_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(h)\right)(x) \geq p' \Rightarrow \left(\vee_{j\in J_k^F} f_{kj}\right)(x) \not\leq p$$

Pelo teorema 4.2, existe um L-conjunto $f_{k,F} \in T$ tal que:

(1) $f_{k,F}(x) \not\leq p$ para cada $y \in X$ com $h(y) \geq p'$.

(2) $\forall x \in X^n,\ \left(\wedge_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(f_{k,F})\right)(x) \not\leq p \Rightarrow \left(\vee_{j\in J_k^F} f_{kj}\right)(x) \not\leq p$

Sejam $k \in \mathbb{N}$ fixado e $\mathbb{F}_k = \{f_{k,F} \in T\ ;\ F \subset_{<\infty} X\}$. Então a sequência $\{\mathbb{F}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é tal que:

$$y \in F \Rightarrow y \in X,\ h(y) = 1 \geq p' \Rightarrow f_{k,F}(y) \not\leq p$$

Como X tem a propriedade ω^* existe uma sequência $\{\mathbb{W}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que:

(3) Cada $\mathbb{W}_k \subset_{<\infty} \mathbb{F}_k$.

(4) $\forall F \subset_{<\infty} X$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$; $k > k_0 \Rightarrow (\exists w \in \mathbb{W}_k;\ \forall y \in F,\ w(y) \not\leq p)$.

Como $w \in \mathbb{W}_k$ podemos escrever $w = f_{k,g}$ para algum $G \subset_{<\infty} X$. Seja $\mathbb{H}_k = \left\{f_{kj} \in \mathbb{U}_k\ ;\ j \in J_k^G,\ f_{k,G} \in \mathbb{W}_k\right\}$, então temos:

(i) Cada $\mathbb{H}_k \subset_{<\infty} \mathbb{U}_k$, pois $\mathbb{W}_k$ e J_k^G são conjuntos finitos.

(ii) Seja $x = (x_1, \cdots, x_n) \in X^n$ então $F = \{x_1, \cdots, x_n\}$ é um subconjunto finito de X. Por (2), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$k > k_0 \Rightarrow (\exists f_{k,G} \in \mathbb{W}_k;\ \forall y \in F,\ f_{k,G}(y) \not\leq p)$$

Então, para $j = 1, \cdots, n$, $f_{k,G}(x_j) \not\leq p$ e $\wedge_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(f_{k,G})(x) \not\leq p$. Por (2), $\vee_{j \in J_k^G} f_{kj}(x) \not\leq p$. Logo existe $j \in J_k^G$ tal que $f_{kj}(x) \not\leq p$. Portanto, X^n é Hurewicz.

Suficiência: Seja $p \in pr(L)$. Seja $\{\mathbb{U}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência onde cada $\mathbb{U}_k$ é uma família de L-conjutos abertos tais que:

$$F \subset_{<\infty} X,\ \exists f \in \mathbb{U}_k;\ \forall x \in F,\ f(x) \not\leq p \tag{5.1}$$

Seja $\mathbb{X} = \sum_{n\in\mathbb{N}} X^n$ o espaço soma, então pelo teorema 5.7, é Hurewicz pois cada X^n é Hurewicz.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ defina $\mathbb{F}_k = \left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} f^n\ ;\ f \in \mathbb{U}_k\right\}$ onde $\sum_{n\in\mathbb{N}} f^n$ é o L-conjunto definido por:

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f^n\right)(x) = \wedge_{j=1}^{m} \pi_j^{-1}(f)(x)$$

para cada $x \in \mathbb{X}$ onde m é o índice tal que $x \in X^m$.

Cada $\sum_{n\in\mathbb{N}} f^n$ é um L-conjunto aberto em $\mathbb{X}$ pois $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f^n\right)|_{X_m} = \wedge_{j=1}^{m} \pi_j^{-1}(f)$ é um L-conjunto aberto em X^m para cada $m \in \mathbb{N}$.

Sejam $x \in \mathbb{X}$ e m o índice tal que $x = (x_1, \cdots, x_m) \in X^m$, então $F = \{x_1, \cdots, x_m\}$ é um subconjunto finito de X, logo, por 5.1, existe $f \in \mathbb{U}_k$ com $f(x_j) \not\leq p$ para $j = 1, \cdots, n$. Seja $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} f^n$, então $g \in F_k$ e $g(x) = \wedge_{j=1}^{m} f(x_j) \not\leq p$, portanto, $\left(\vee_{g\in\mathbb{F}_k} g\right)(x) \not\leq p$.

Como $\mathbb{X}$ é Hurewicz, existe uma sequência $\{\mathbb{H}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que:

(1) Cada $\mathbb{H}_k \subset_{<\infty} \mathbb{F}_k$.

(2) $\forall x \in \mathbb{X}$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$; $k > k_0 \Rightarrow (\exists f \in \mathbb{H}_k,\ f(x) \not\leq p)$.

Por (1) podemos escrever $\mathbb{H}_k = \left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} f_j^n\right\}_{j\in J_k}$ onde J_k é um conjunto finito de índices. Seja $\mathbb{V}_k = \{f_j\}_{j\in J_k}$ então temos:

(i) Cada $\mathbb{V}_k \subset_{<\infty} \mathbb{U}_k$.

(ii) Seja $F = \{x_1, \cdots, x_m\}$ um subconjunto finito de X. Seja $x = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{X}$, então, por (2), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$k > k_0 \Rightarrow (\exists g \in \mathbb{H}_k;\ g(x) \not\leq p)$$

Escreva $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_j^n$ onde $f_j \in \mathbb{U}_k$ e $j \in J_k$, ou seja, $f_j \in \mathbb{V}_k$. Como $g(x) \not\leq p$, $\wedge_{i=1}^m f_j(x_i) \not\leq p$, então para cada $i = 1, \cdots, m$, $f_j(x_i) \not\leq p$. Logo $f_j(y) \not\leq p$ para cada $y \in F$.

Portanto X tem a propriedade ω^*. ■

Referências Bibliográficas

[1] G. Birkhoff, *"Lattice theory"*, Amer. Mat. Soc. Colloq. Publ., vol. 25, Providence, R.I., (1984).

[2] C. L. Chang, *"Fuzzy topological spaces"*, J. Math. Anal. Appl. 24, (1968) 182-190.

[3] J. Dugundji, *"Topology"*, Allyn and Bacon, Boston (1988)

[4] T.E. Gantner, R.C. Steinlage and R.H. Warren, *" Compactness in fuzzy topological spaces"*, J. Math. Anal. Appl. 62, (1978) 547-562.

[5] G. Gierz at al., *"A compendium of continuous lattices"*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, (1986).

[6] J. A. Goguen, *"L-fuzzy sets"*, J. Math. Anal. Appl. 18, (1973) 145-174.

[7] B. Hutton, *"Products of fuzzy topological spaces"*, Topology and it's Applications 11, (1980) 59-67.

[8] W. Hurewicz, Über eine verallgeneinerung des Borelschen Theorems, Mathematische Zeitschrift 24 (1925) 401-421.

[9] S.R.T. Kudri. *"L-fuzzy local compactness"*, Fuzzy sets and systems 67, (1994) 337-345.

[10] S.R.T. Kudri. *"L-fuzzy weak local compactness"*, Fuzzy sets and systems 81, (1996) 275-279.

[11] S.R.T. Kudri. *"Compactness in L-fuzzy topological spaces"*, Fuzzy sets and systems 67, (1994) 329-446.

[12] S.R.T. Kudri. *"L- fuzzy compactness and related concepts"*, Ph.D. Thesis, City University, London, (1995)

[13] R. Lowen, *"Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness"*, J.Math.Anal. Appl. 56, (1976) 621-633.

[14] S. R. Malghan and S. S. Benchalli, *"Open maps, closed maps and local compacness in fuzzy topological spaces"*, J. Math. Anal. Appl. 99, (1984) 338-349.

[15] J. Munkres, *"Topology: A First Course"*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1999)

[16] P.M. Pu, Y.M. Liu, *"Fuzzy topology I, neighbourhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence"*, J.Math.Anal.Appl. 76, (1980) 571-599.

[17] P.M. Pu, Y.M. Liu, *"Fuzzy topology II, product and quotient spaces"*, J.Math.Anal.Appl. 77, (1980) 20-37.

[18] Lj. Kočinac, M. Scheepers, Function spaces and a property of Reznichenko, Topology and Applications 123 (2002) 135-143.

[19] A. Sostak. *On a fuzzy topological structures* Supp. Rend. Circ. Mat. Palermo (Ser. II) 11 (1985) 89-103

[20] M. W. Warner, *"Fuzzy topology with respect to continuous lattice"*, Fuzzy Sets and Systems 35, (1990) 85-91.

[21] M. W. Warner, *"Frame-fuzzy points and membership"*, Fuzzy Sets and Systems 42, (1991) 335-344.

[22] M. W. Warner and R. G. McLean, *"On compact Hausdorff L-fuzzy spaces"*, Fuzzy Sets and Systems 56, (1993) 103-110.

[23] M. W. Warner and R. G. McLean, *"Locale theory and fuzzy topology"*, Fuzzy Sets and Systems 54, (1993) 91-97.

[24] M. D. Weiss, *"Fixed points, separation and induced topologies for fuzzy sets "*, J. Math. Anal. Appl. 50, (1975) 142-150.

[25] C. K. Wong, *"Fuzzy points and local properties of fuzzy topology"*, J. Math. Anal. Appl. 46, (1974) 316-328.

[26] L.A. Zadeh, *Fuzzy sets* Inform. Contr. 8 (1965) 338-353